



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/02

O Modelo de Skyrme-Faddeev para o  $SU(N)$

Anna Gabriella Tempesta

Orientador

Luiz Agostinho Ferreira

Janeiro de 2002

“Apesar de, se deve amar  
apesar de, se deve comer  
apesar de, se deve sofrer  
apesar de, se deve viver.

Inclusive, muitas vezes é o próprio apesar de  
que nos empurra para a frente  
foi o apesar de que me criou uma angústia  
que, insatisfeita,  
foi criadora da minha própria existência”  
*(Clarice Lispector)*

## Agradecimentos

Ao refletir a respeito de quem foram aqueles de algum modo colaboraram para este trabalho, percebi que todas as pessoas que fazem parte do meu cotidiano contribuíram. Todos aqueles que nesse período me fizeram raciocinar, reagir, ralar, rir ou chorar deixaram as suas impressões em mim e merecem minha gratidão.

De um modo especial, agradeço ao meu orientador -Luiz Agostinho Ferreira. Foi muito bom ter a oportunidade de trabalhar com alguém de tamanha competência e seriedade. Jamais esquecerei daquele me orientou e apoiou em todos os momentos que precisei, desde que o conheci.

Ao Marcelo e à Alicia, agradeço todos os dias por estarmos juntos. Nada faria sentido se meus dias deixassem de ser iluminados pelo sorriso da Alicia e eu não teria forças para superar as inúmeras adversidades se o Marcelo não estivesse ao meu lado.

Todos os meus familiares têm minha eterna gratidão por terem acreditado nos meus sonhos.

Agradeço também aos meus amigos, que são o que tenho de melhor.

Este trabalho foi realizado com apoio financeiro da CAPES.

## Resumo

Neste trabalho foi realizado um estudo sobre modelos integráveis em dimensões maiores que dois e em especial do modelo de Skyrme-Faddeev. Também se propôs um submodelo para o modelo de Skyrme-Faddeev no  $SU(N)$ .

O modelo, idealizado por Skyrme [19] para o  $SU(2)$ , insere na Lagrangeana termos com derivadas de ordem maior que dois. A inserção destes termos se dá para que o modelo possua sólitons estáticos estáveis em  $(3+1)$  dimensões. Faddeev [8] generalizou a idéia de Skyrme para modelos que vivem na esfera e mostrou a existência de sólitons com carga topológica dada pelo número de Hopf, i.e.  $\pi_3(S^2)$ . Mais recentemente Faddeev e Niemi [11] conjecturaram que aquele modelo descreve o limite de baixas energias da teoria de Yang-Mills do  $SU(N)$  sem matéria. Os sólitons de Hopf poderiam ser interpretados como as glueballs.

Partindo da Lagrangeana proposta por Faddeev, foram encontradas as equações de movimento em termos da condição de curvatura nula. Encontrada a curvatura nula, iniciou-se um estudo do modelo para o  $SU(3)$  que posteriormente foi generalizado para o  $SU(N)$ . Neste estudo foi realizada uma parametrização do  $SU(3)$  em termos de três campos complexos  $u_1, u_2, u_3$  e então o potencial da curvatura nula foi escrito em termos dos campos complexos. A condição de curvatura nula foi então escrita em uma representação genérica que contém a representação adjunta do  $SU(3)$  para que se pudesse verificar os vínculos relevantes para se obter um submodelo integrável.

**Palavras Chaves:** Sólitons; Modelos Integráveis; Modelo de Sine-Gordon; Modelos Sigma Não-lineares; Modelos de Skyrme-Faddeev.

**Áreas do conhecimento:** Teoria de Grupos; Teoria Clássica de Campos; Teoria Quântica de Campos; Física-Matemática.

## Abstract

In this work we made a study about integrable systems in dimensions greater than two, specially the Skyrme-Faddeev model. We also proposed a submodel for the  $SU(N)$  Skyrme-Faddeev model.

The model idealized by Skyrme [19] to  $SU(2)$  has in its Lagrangian derivative terms with order greater than two. These new terms are important to have stable static soliton like solutions in (3+1) dimensions. Faddeev [8] generalized the Skyrme idea to models in the sphere and shown the existence of solitons with topological charge given by the Hopf number, i.e.  $\pi_3(S^2)$ . More recently, Faddeev and Niemi [11] conjectured that the Skyrme-Faddeev model could describe the infrared limit of the Yang-Mills theory for the  $SU(N)$  without matter. The Hopf solitons could be interpreted as the glueballs.

We found the equations of motion of the Skyrme-Faddeev model in terms of the zero curvature condition. A study of the model to  $SU(3)$  was made and generalized to  $SU(N)$ . A parametrization of  $SU(3)$  in terms of the complex fields  $u_1, u_2, u_3$  was made and the zero curvature potential was then written as function of the complex fields. Finally we wrote the zero curvature condition in a generical  $SU(3)$  representation in order to verify the relevant constraints that lead to an integrable submodel.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelos Integráveis em Duas Dimensões</b>	<b>4</b>
2.1	A equação de Lax . . . . .	4
2.2	Modelos Integráveis . . . . .	7
2.3	O Modelo de Sine-Gordon . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Teorias Integráveis em <math>d+1</math> Dimensões</b>	<b>18</b>
3.1	A Generalização da Condição de Curvatura Nula para Dimensões mais Altas . . . . .	18
3.2	Submodelos Integráveis . . . . .	25
3.3	O Exemplo do Modelo $CP^1$ . . . . .	28
3.3.1	Um submodelo do $CP^1$ . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Modelos de Skyrme-Faddeev</b>	<b>35</b>
4.1	Introdução . . . . .	35
4.2	Dualidade Parcial na Teoria de Yang-Mills no $SU(2)$ . . . . .	35
4.2.1	Justificando a nova ação de Yang-Mills . . . . .	37
4.3	Um Submodelo para o Modelo de SF no $SU(2)$ . . . . .	41
4.4	Dualidade Parcial da Teoria de Yang-Mills no $SU(N)$ . . . . .	43
<b>5</b>	<b>O Modelo de Skyrme-Faddeev para o <math>SU(N)</math></b>	<b>47</b>
5.1	A Condição de Curvatura Nula para o Modelo de SF no $SU(N)$ . . . .	47
5.2	O Modelo de SF para o $SU(3)$ . . . . .	50
5.3	A Curvatura Nula em uma Representação Qualquer . . . . .	54
5.3.1	A Construção de Schwinger . . . . .	54
5.3.2	Construindo uma Representação Genérica . . . . .	56
5.4	Conclusões . . . . .	64
	<b>Referências</b>	<b>67</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Grande parte dos fenômenos da natureza podem ser descritos por teorias não lineares. Alguns destes sistemas são bastante complexos e difíceis de serem tratados exatamente. Os sistemas muito complexos podem ser tratados, por exemplo numericamente ou através de discretização na rede.

Os sistemas não-lineares que podem ser tratados exatamente possuem um alto grau de simetria e alguns deles apresentam soluções tipo sóliton.

Praticamente todas as teorias em (1+1) dimensões que possuem sólitons são integráveis no sentido que suas equações de movimento podem ser escritas em termos da equação de Lax-Zakharov-Shabat -ou condição de curvatura nula,

$$[\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0$$

O modelo de Sine-Gordon é colocado neste trabalho para exemplificar a integrabilidade em (1+1) dimensões e para mostrar que a condição de curvatura nula em 2 dimensões é uma lei de conservação .

O. Alvarez, L.A. Ferreira and J.S. Guillén [2] propuseram uma generalização da condição de curvatura nula para teorias de campo relativísticas em dimensões maiores que 2. Esta generalização é baseada em um princípio geométrico formulado no espaço dos loops e proporciona um critério de integrabilidade para dimensões maiores que 2. Este critério permite que se chegue a novos modelos integráveis e pode ser utilizado para construir um número infinito de correntes conservadas não triviais, além de permitir que se encontrem novas soluções para alguns modelos de interesse físico, tais como:

1. Chern-Simons
2. Modelos Sigma Não lineares
3. Yang-Mills autodual

#### 4. Equações de Bogomolny (monopolos BPS)

#### 5. Modelos de Skyrme-Faddeev

Em algumas situações é possível se chegar a um número infinito de correntes conservadas locais sem que seja necessário impor vínculos. Entretanto, na maior parte dos casos, é necessário impor vínculos para que se chegue a um submodelo com um número infinito de correntes conservadas locais.

Neste trabalho é realizado um estudo do modelo de Skyrme-Faddeev para o  $SU(N)$ . O modelo, idealizado por Skyrme [19] para o  $SU(2)$ , insere na Lagrangeana termos com derivadas de ordem maior que dois. A inserção destes termos se dá para que o modelo possua sólitons estáveis em (3+1) dimensões. Faddeev [8] generalizou a idéia de Skyrme para modelos que vivem na esfera. Posteriormente, Faddeev e Niemi [11] conjecturaram que no limite infravermelho da teoria de Yang-Mills o parâmetro de ordem correto é dado por  $N-1$  campos vetoriais mutuamente ortogonais  $m_i^a$ , onde  $a = 1, \dots, N^2 - 1 = \text{Dim}[SU(N)]$ , de modo que tais campos descrevem  $N(N - 1)$  variáveis independentes. Em termos das novas variáveis, a Lagrangeana efetiva da teoria de Yang-Mills de baixas energias sem matéria seria então dada por

$$L = \frac{M_i^2}{2} (\partial_\mu m_i)^2 + \frac{1}{e_i^2} ([\partial_\mu m_i, \partial_\nu m_i])^2$$

onde  $M_i$  é um fator de massa,  $m_i$  são vetores na órbita  $SU(N)/U(1)^{N-1}$  e  $e_i$  é uma constante de acoplamento adimensional, com  $i = 1, \dots, N - 1$ ; é possível encontrar sólitons estáveis que seriam os candidatos naturais para descrever as glueballs.

Partindo da Lagrangeana de Skyrme-Faddeev foram encontradas as equações de movimento em termos da condição de curvatura nula. Encontrada a curvatura nula, viu-se que o número de correntes conservadas era igual à dimensão da representação do  $SU(N)$  de modo que era necessário buscar uma representação infinita para obter um número infinito de quantidades conservadas.

Iniciou-se então, um estudo do modelo para o  $SU(3)$  que posteriormente foi generalizado para o  $SU(N)$ . Neste estudo foi realizada uma parametrização do  $SU(3)$  em termos dos campos complexos  $u_1, u_2, u_3$  e então o potencial da curvatura nula  $-A_\mu$  foi escrito em termos dos três campos complexos. Utilizou-se então a construção de Schwinger para escrever a condição de curvatura nula em uma representação genérica que contivesse todos os pesos da representação adjunta do  $SU(3)$ .

Nessa representação, só foi possível recuperar as equações de movimento quando se impuseram os vínculos

$$A^{\alpha_i} B^{\alpha_i} = 0 \quad A^{-\alpha_i} B^{-\alpha_i} = 0$$



$$\begin{aligned}
A^{\alpha_1} B^{\alpha_3} &= 0 & A^{\alpha_3} B^{\alpha_1} &= 0 \\
A^{\alpha_2} B^{\alpha_3} &= 0 & A^{\alpha_3} B^{\alpha_2} &= 0 \\
A^{\alpha_2} B^{-\alpha_1} &= 0 & A^{-\alpha_1} B^{\alpha_2} &= 0 \\
A^{-\alpha_1} B^{-\alpha_3} &= 0 & A^{-\alpha_3} B^{-\alpha_1} &= 0 \\
A^{-\alpha_2} B^{-\alpha_3} &= 0 & A^{-\alpha_3} B^{-\alpha_2} &= 0 \\
A^{\alpha_1} B^{-\alpha_2} &= 0 & A^{-\alpha_2} B^{\alpha_1} &= 0
\end{aligned}
\tag{1.0.1}$$

onde  $A_\mu^{\alpha_i}$  são as componentes do potencial  $A_\mu$  dado por

$$A_\mu = g^{-1} \partial_\mu g$$

sendo  $g$  unitário e pertencente à algebra. É interessante que se faça um estudo das soluções deste submodelo e que se verifique a existência de soluções tipo sóliton, já que o modelo de Skyrme-Faddeev é de grande interesse físico por ser uma tentativa de se explicar a teoria de Yang-Mills no limite infravermelho.

## Capítulo 2

### Modelos Integráveis em Duas Dimensões

#### 2.1 A equação de Lax

Em 1955 Fermi, Pasta e Ulam estudaram o comportamento de redes não lineares através de simulações numéricas. Eles consideraram um sistema composto por  $N$  massas ligadas por molas não lineares. Nas simulações apenas o modo mais baixo era excitado. A expectativa era que o sistema tivesse um comportamento ergódico, ou seja, que depois de algum tempo a energia estivesse igualmente distribuída entre os modos. O que ocorreu foi que apenas os modos mais baixos eram excitados e, depois de algum tempo, se obtinha uma configuração aproximadamente igual à configuração inicial. Este fato indicava que deveriam haver quantidades conservadas que restringiam o espaço de fase. O sistema deveria possuir simetrias escondidas.

Analisando o problema de Fermi, Pasta e Ulam, M.Toda propôs em 1967 que se a força da mola fosse proporcional à exponencial do deslocamento [12], o sistema poderia ser resolvido exatamente (os dois primeiros termos da expansão exponencial recuperam a lei de Hooke). Com base nessa proposição ele considerou o potencial

$$V(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar \quad (2.1.1)$$

onde  $ab > 0$

O potencial (2.1.1) pode ser expandido da forma

$$V(r) = \left(1 + \frac{b^2}{2}r^2 - \frac{b^3}{3!}r^3 + \dots\right) \frac{a}{b}$$

De modo que as equações de movimento são:

$$\frac{d^2y_n}{dt^2} = -V'(r_{n-1}) + V'(r_n) \quad (2.1.2)$$

onde

$y_n \equiv$  deslocamento da massa  $n$

$$r_n \equiv y_{n+1} - y_n$$

e

$$V'(r_n) = \frac{dV(r_n)}{dr_n} = -ae^{-br} + a$$

A diferença de potencial é dada por

$$-V'(r_{n-1}) + V'(r_n) = a(e^{-b(y_n - y_{n-1})} - e^{-b(y_{n+1} - y_n)}) \quad (2.1.3)$$

Fazendo as seguintes redefinições  $\sqrt{\frac{ab}{n}}t \rightarrow t$  e  $by_n \rightarrow q_n$  em (2.1.2) e (2.1.3), as equações de movimento se tornarão

$$\frac{d^2q_n}{dt^2} = e^{-(q_n - q_{n-1})} - e^{-(q_{n+1} - q_n)} \equiv \frac{dp_n}{dt} \quad (2.1.4)$$

De modo que as quantidades

$$a_n = \frac{1}{2}e^{\frac{-(q_{n+1} - q_n)}{2}} \quad (2.1.5)$$

$$b_n = \frac{1}{2}p_n \quad (2.1.6)$$

satisfazem

$$\frac{db_n}{dt} = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) \text{ (dinâmica)} \quad (2.1.7)$$

$$\frac{da_n}{dt} = a_n(b_n - b_{n+1}) \text{ (cinemática)} \quad (2.1.8)$$

No caso da rede periódica, onde se tem, por exemplo, um sistema com  $N$  massas conectadas através de molas, introduz-se as matrizes

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{N-1} & a_{N-1} \\ a_N & 0 & \cdots & \cdots & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_N \\ a_1 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & -a_{N-1} \\ -a_N & 0 & \cdots & \cdots & a_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.10)$$

Partindo-se de  $L$  e  $M$  descritos em (2.1.7) e (2.1.8) pode-se chegar na equação de Lax,

$$\frac{dL}{dt} = [M, L] \quad (2.1.11)$$

Uma das conseqüências desta equação é que

$$I_n \equiv \text{Tr } L^n \quad (2.1.12)$$

são quantidades conservadas, visto que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Tr } L^n &= \text{Tr}([M, L]L^{n-1} + L[M, L]L^{n-2} + \dots + L^{n-1}[M, L]) \\ &= \text{Tr}([M, L^n]) = 0 \end{aligned}$$

A conservação (1.1.12) também pode ser expressa através dos autovalores de  $L$ , da seguinte forma

$$L(t) | \psi(t) \rangle = \lambda | \psi(t) \rangle \quad (2.1.13)$$

derivando em relação ao tempo, tem-se

$$\dot{L} | \psi \rangle + L | \dot{\psi} \rangle = \dot{\lambda} | \psi \rangle + \lambda | \dot{\psi} \rangle \quad (2.1.14)$$

Observe-se que  $L$  é hermitiano, de modo que  $\langle \psi | L = \lambda \langle \psi |$ .

Ao se substituir (2.1.11) em (2.1.14) e multiplicar por  $\langle \psi |$  à esquerda, obtém-se

$$\langle \psi | [M, L] | \psi \rangle = \dot{\lambda} \langle \psi | \psi \rangle$$

$$\langle \psi | [M, L] | \psi \rangle = \langle \psi | ML - LM | \psi \rangle = 0$$

ou seja

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (2.1.15)$$

Se  $N = 3$ , as quantidades conservadas são

$$\begin{aligned} I_1 &= b_1 + b_2 + b_3 \\ I_2 &= b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \\ I_3 &= b_1 b_2 b_3 - b_1 a_2^2 - b_2 a_3^2 - b_3 a_1^2 + 2a_1 a_2 a_3 \\ \frac{1}{2}H &= I_1^2 - 2I_2 \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

As matrizes de (2.1.9) e (2.1.10) pertencem à álgebra de  $SL(N)$  e as quantidades conservadas estão relacionadas ao grupo  $SL(N)$  pois foram obtidas a partir da equação de Lax, definida nessa álgebra. Não se conhece nenhuma simetria da Hamiltoniana associada ao grupo  $SL(N)$  que leve a cargas de Noether, por esta razão diz-se que  $SL(N)$  é uma simetria escondida do modelo.

As soluções sólitons e as quantidades conservadas, que levam à integrabilidade da teoria, estão relacionadas a esta estrutura algébrica.

## 2.2 Modelos Integráveis

Considere um sistema Hamiltoniano com  $N$  graus de liberdade  $(p_i, q_i)$ , onde  $i = 1, 2, \dots, N$ . Caso este sistema possua  $N$  quantidades conservadas e estas estiverem em involução (o parênteses de Poisson nulo)

$$\{I_n, I_m\} \equiv \frac{\partial I_n}{\partial p_i} \frac{\partial I_m}{\partial q_i} - \frac{\partial I_n}{\partial q_i} \frac{\partial I_m}{\partial p_i} = 0 \quad (2.2.17)$$

existe uma transformação canônica

$$(p_i, q_i) \rightarrow (F_i, w_i) \quad (2.2.18)$$

tal que:

1.  $F_i = F_i(I)$
2. A Hamiltoniana é uma função somente de  $F_i$  de modo que  $w_i$  são coordenadas cíclicas.

Assim sendo, o sistema é integrável por quadraturas

$$\frac{dF_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial w_i} = 0 \quad (2.2.19)$$

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial F_i} = cte \quad (2.2.20)$$

Daí, pode-se notar que

$$w_i = cte t + cte'$$

De modo geral não é fácil encontrar as simetrias associadas às leis de conservação e, para alguns modelos - como os que satisfazem as condições do Teorema de Liouville - encontrar a transformação canônica que leva às variáveis de ângulo-ação não é uma tarefa simples.

Sendo assim, foram desenvolvidas técnicas exatas, não necessariamente baseadas no formalismo Hamiltoniano ou Lagrangeano, que permitem construir quantidades conservadas e soluções. Essas técnicas estão baseadas em um problema linear associado.

A grande maioria das teorias que apresenta soluções sólitons possui uma representação das suas equações de movimento em termos da equação de Lax, ou da condição de curvatura nula.

Na seção anterior tratou-se de um sistema de partículas, mas pode-se também considerar as equações de Lax sob uma ótica de teoria de campos. Para (1 + 1) dimensões a equação de Lax é substituída pela condição de curvatura nula

$$[\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0$$

ou

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0 \text{ com } \mu, \nu = 0, 1 \quad (2.2.21)$$

Pode-se recuperar a equação de Lax ao se considerar  $x_o = t, x' \equiv x$  e  $A_1 \equiv L, A_o \equiv -M$ , com ambos independentes de  $x$ . A equação (2.2.21) é invariante pelas transformações de gauge

$$A_\mu \rightarrow g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \quad (2.2.22)$$

onde  $g$  são matrizes de um grupo e  $A_\mu$  matrizes de uma álgebra de Lie.

A equação (2.2.21) é uma lei de conservação que, em geral, leva a quantidades conservadas não locais. Contudo, há casos em que se pode chegar a quantidades localmente conservadas.

Supõe-se que exista uma matriz  $g$  que transforma as matrizes  $A_\mu$  em matrizes diagonais  $a_\mu$ ,

$$g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} = a_\mu \quad (2.2.23)$$

assim

$$[\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] \rightarrow [\partial_\mu + a_\mu, \partial_\nu + a_\nu] = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$$

Define-se agora

$$j^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} a_\nu \quad \mu, \nu = 0, 1 \quad \varepsilon^{01} = 1 \quad (2.2.24)$$

ou seja

$$j^0 = \varepsilon^{01} a_1 = a_1 \quad j^1 = \varepsilon^{10} a_0 = -a_0$$

e daí

$$\partial_0 a_1 - \partial_1 a_0 = \partial_0 j^0 - \partial_1 j^1 = 0 \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.2.25)$$

Portanto a carga

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} dx j^0 \quad (2.2.26)$$

é conservada, ou seja,

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

O número de cargas conservadas é igual à dimensão das matrizes diagonais.

## 2.3 O Modelo de Sine-Gordon

Tomando-se a equação (2.1.4) para o caso periódico com duas partículas ( $N = 2$ ). Os deslocamentos das massas  $q_n$  são tais que

$$q_2 = q_0, \quad q_{-1} = q_1 \quad (2.3.27)$$

Fica-se então com as equações de movimento

$$\ddot{q}_0 = e^{-(q_0 - q_1)} - e^{-(q_1 - q_0)} \quad (2.3.28)$$

$$\ddot{q}_1 = e^{-(q_1 - q_0)} - e^{-(q_0 - q_1)} \quad (2.3.29)$$

ou

$$\frac{d^2}{dt^2}(q_0 - q_1) = 2(e^{-(q_0 - q_1)} - e^{-(q_1 - q_0)}) \quad (2.3.30)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(q_0 + q_1) = 0 \quad (2.3.31)$$

De modo que a dinâmica é determinada por  $q_0 - q_1$ .

Ao definir  $q \equiv i(q_0 - q_1)$ , obtém-se

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = 4 \sin q \quad (2.3.32)$$

que é a equação de Sine-Gordon unidimensional. Pode-se agora definir uma teoria de campos em (1 + 1) dimensões e invariante de Lorentz dada por

$$\square \phi + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \phi = 0 \quad (2.3.33)$$

onde  $\square$  é o d'Alambertiano, dado por

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (2.3.34)$$

A equação (2.3.33) pode ser obtida a partir da Lagrangeana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m^2}{\beta^2} (\cos(\beta \phi) - 1) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{2m^2}{\beta^2} \left[ \sin\left(\frac{\beta \phi}{2}\right) \right]^2 \equiv T - V \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

onde o potencial  $V(\phi) = -\frac{2m^2}{\beta^2} [\sin(\frac{\beta \phi}{2})]^2$  possui um número infinito de vácuos  $\phi = \frac{2\pi n}{\beta}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

A partir da introdução dos potenciais

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{i\beta}{m}\partial_1\phi & e^{\frac{i\beta\phi}{2}} + \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{i\beta\phi}{2}} \\ e^{\frac{i\beta\phi}{2}} + \lambda e^{-\frac{i\beta\phi}{2}} & -i\frac{\beta}{m}\partial_1\phi \end{pmatrix} \quad (2.3.36)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{i\beta}{m}\partial_0\phi & e^{\frac{i\beta\phi}{2}} + \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{i\beta\phi}{2}} \\ -e^{\frac{i\beta\phi}{2}} + \lambda e^{-\frac{i\beta\phi}{2}} & -i\frac{\beta}{m}\partial_0\phi \end{pmatrix} \quad (2.3.37)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro arbitrário (parâmetro espectral). Pode-se verificar que a equação de curvatura nula

$$\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 + [A_0, A_1] = 0 \quad (2.3.38)$$

é equivalente a (1.3.33).

Nota-se daí que o modelo de Sine-Gordon possui uma representação em termos da curvatura nula e, neste sentido, ele é um modelo integrável.

É possível encontrar uma transformação de gauge onde

$$gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \equiv a_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} a_\mu^{(n)} \lambda^{-n} \quad (\text{também válida para potências positivas de } \lambda) \quad (2.3.39)$$

de onde se conclui que o modelo possui um número infinito de correntes conservadas

$$j^\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_{(n)}^\mu \lambda^{-n} \quad (2.3.40)$$

### Carga Topológica

Para se chegar em soluções clássicas que possuam energia finita o campo deve tender ao vácuo ( $\phi \rightarrow \frac{2\pi n}{\beta}$ ) quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Como o vácuo é degenerado é possível que haja um comportamento não trivial quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , ou seja  $\phi$  tende a vácuos diferentes para  $x \rightarrow +\infty$  ou para  $x \rightarrow -\infty$ .

Devido a esse comportamento, vai-se introduzir a corrente topológica

$$j_{top.}^\mu = \frac{\beta}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (2.3.41)$$

Independentemente das equações de movimento, esta corrente é conservada, ou seja,

$$\partial_\mu j_{top.}^\mu = \frac{\beta}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0 \quad (2.3.42)$$

A carga topológica é dada por

$$Q_{top} = \int_{-\infty}^{\infty} dx j_{top.}^0 = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_\alpha \phi = \frac{\beta}{2\pi} (\phi(\infty) - \phi(-\infty)) \quad (2.3.43)$$



## Solução de 1-sóliton

Para encontrar a solução solitônica do modelo de Sine-Gordon vai-se utilizar o método de Hirota. Para utilizar este método introduz-se as funções  $\tau$  de modo que

$$\phi = \ln \frac{\tau_1}{\tau_0} \quad (2.3.44)$$

a solução de 1-sóliton é,

$$\phi = \pm \frac{4}{\beta} \arctan e^{m(x-vt-x_0)/\sqrt{1-v^2}} \quad (2.3.45)$$

para  $m > 0$  tem-se

$$\phi \rightarrow \pm \frac{2\pi}{\beta} \quad x \rightarrow \infty$$

$$\phi \rightarrow 0 \quad x \rightarrow -\infty$$

e a carga topológica será,

$$Q_{top} = \pm 1 \quad (2.3.46)$$

onde  $Q_{top} = 1$  equivale a um sóliton e  $Q_{top} = -1$  equivale a um anti-sóliton.

Pode-se escolher um referencial de Lorentz no qual a solução é estática. Para este referencial a energia da solução pode ser interpretada como a massa do sóliton. Para o modelo de Sine-Gordon, a massa do sóliton é dada por,

$$M_{sol} = \frac{8m}{\beta^2} \quad (2.3.47)$$

Quando os sólitons colidem e preservam sua forma, o único efeito da colisão é uma mudança de fase. Pode-se interpretar os sólitons como partículas da teoria.

As partícula usuais da teoria estão associadas às flutuações quânticas do campo escalar  $\phi$ . Linearizando (2.3.33), tem-se:

$$\square\phi + m^2\phi + \frac{m^2}{2}\beta^2\phi^3 + \dots = 0 \quad (2.3.48)$$

Para  $\beta = 0$  tem-se uma teoria livre (equação de Klein-Gordon) e as partícula correspondentes têm massa

$$M = m\hbar \quad (2.3.49)$$

e

$$M_{sol} = \frac{8}{\beta^2\hbar} M \quad (2.3.50)$$

A constante  $\beta$  mede a intensidade da interação entre as partícula do campo  $\phi$ . Quanto menor for o valor de  $\beta$ , mais perto se ficará da teoria livre e maior será a massa do sóliton. A interação entre os sólitons também aumenta com a diminuição de  $\beta$ .

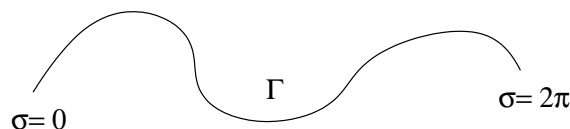
Ao quantizar a teoria tanto as partícula associadas ao campo  $\phi$  quanto os sólitons aparecem no espectro. No entanto, existe uma dualidade entre o setor de acoplamento fraco e forte. Quando  $\beta$  é pequeno o campo  $\phi$  é fracamente acoplado e os sólitons são fortemente acoplados. No caso de  $\beta$  grande ocorre o inverso, o campo  $\phi$  é fortemente acoplado e os sólitons são fracamente acoplados.

Os sólitons correspondem a férmions do modelo de Thirring Massivo e a carga topológica dos sólitons é identificada com as cargas elétricas do modelo de Thirring.

### Construção de Correntes Conservadas

Existe uma grande variedade de métodos para construir soluções e cargas conservadas, contudo grande parte desses métodos baseia-se em conceitos de integrabilidade que só são válidos para duas dimensões e não podem ser generalizados para dimensões mais altas. Vai-se fazer aqui uma revisão dos conceitos de integrabilidade que são válidos para um espaço- tempo de dimensão qualquer.

Considere a curva  $\Gamma$ , parametrizada por  $\sigma$  de modo que  $\sigma = 0$  e  $\sigma = 2\pi$  correspondem aos extremos de  $\Gamma$ .



Seja  $W$  uma quantidade definida pela equação diferencial

$$\frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0 \quad (2.3.51)$$

com a condição inicial de que  $W(0) = 1$  e onde  $A_\mu$  é uma conexão que carrega valores de uma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  de um grupo de Lie  $G$ .

Ver-se-á agora como  $W$  varia sob as transformações de  $\Gamma$  que possui ponto inicial  $x^\mu(\sigma = 0)$  fixo.

Tem-se então,

$$\frac{d\delta W}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta W + \delta \left( A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) W = 0 \quad (2.3.52)$$

Multiplicando-se à esquerda por  $W^{-1}$  e usando o fato de que 2.3.51 implica em

$$\frac{dW^{-1}}{d\sigma} - W^{-1} A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} = 0 \quad (2.3.53)$$

obtem-se

$$\frac{d}{d\sigma} (W^{-1} \delta W) = -W^{-1} \left( \partial_\lambda A_\mu \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} + A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\sigma} \right) W \quad (2.3.54)$$

Depois de uma integração por partes, o resultado é:

$$W^{-1} \delta W = -W^{-1} A_\mu W \delta x^\mu + \int_0^\sigma d\sigma' W^{-1} F_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \delta x^\nu \quad (2.3.55)$$

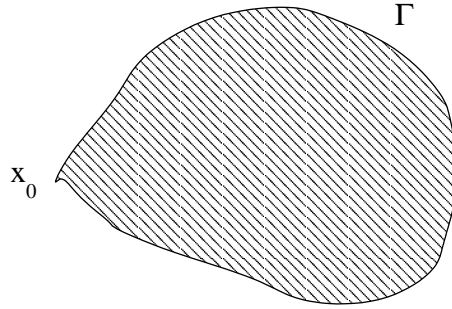
onde

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (2.3.56)$$

Caso se considere variações de  $\Gamma$  onde o extremo em  $\sigma = 2\pi$  também é mantido fixo pode-se obter da equação 2.3.55 que:

$$W^{-1}(2\pi) \delta W(2\pi) = \int_0^{2\pi} d\sigma' W^{-1} F_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \delta x^\nu \quad (2.3.57)$$

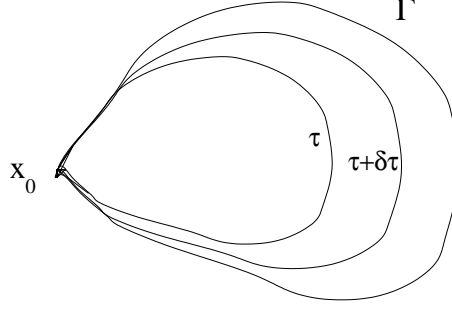
Considere agora que  $\Gamma$  seja uma curva fechada ( $x_0 \equiv x^\mu(0) = x^\mu(2\pi)$ ) e seja uma superfície  $\Sigma$  que possui  $\Gamma$  como contorno.



Pode-se obter  $\Sigma$  através de loops que começam e terminam no ponto fixo  $x_0$  e esses loops podem ser parametrizados por  $\tau$  de modo que  $\tau = 0$  corresponde ao loop infinitesimal em torno de  $x_0$  e  $\tau = 2\pi$  corresponde a  $\Sigma$ .

Agora vai-se tomar uma variação em  $W$  que corresponda à deformação de um loop em outro, isto é

$$\delta = \delta\tau \frac{d}{d\tau} \quad (2.3.58)$$



e assim pode-se escrever (2.3.57) como

$$\frac{dW(2\pi)}{d\tau} - W(2\pi) \int_0^{2\pi} d\sigma' W^{-1} F_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.3.59)$$

O fato de ser possível escrever  $W$  dessas duas formas é precisamente o enunciado do teorema de Stokes não abeliano,

$$P \exp \left( \oint_{\Gamma} d\sigma A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) = \mathcal{P} \exp \left( \int_{\Sigma} d\tau d\sigma W^{-1} F_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \quad (2.3.60)$$

onde  $P$  e  $\mathcal{P}$  denotam o ordenamento de caminho e de superfície respectivamente.

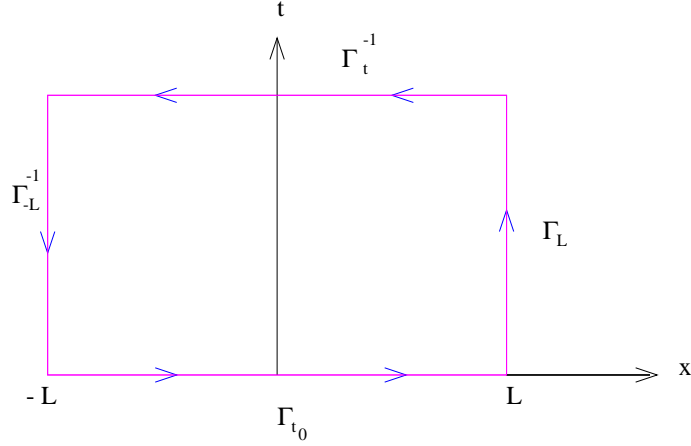
Vai-se ver agora como surgem as leis de conservação . A equação de curvatura nula determina que em duas dimensões

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad \mu, \nu = 0, 1(x, t) \quad (2.3.61)$$

aplicando-se este resultado na equação (2.3.57) percebe-se que  $W$  é independente do caminho

$$F_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \delta W(2\pi) = 0 \quad (2.3.62)$$

Então, caso seja tomado um caminho fechado vê-se que  $W(2\pi)$  é igual a  $W(x_0)$ , desde que o espaço tempo não tenha buracos ou alças.



Toma-se agora o contorno fechado indicado na figura acima. Para  $x_0 = (-L, 0)$  e  $W(x_0) = 1$ , tem-se que  $W$  integrado nesse contorno é igual a um. Pode-se notar também que o valor de  $W$  integrado em uma curva é igual ao valor do inverso de  $W$  integrado na mesma curva no sentido oposto, ou seja

$$W(\Gamma^{-1}) = W^{-1}(\Gamma) \quad (2.3.63)$$

de modo que

$$W(\Gamma_{-L}^{-1})W(\Gamma_t^{-1})W(\Gamma_L)W(\Gamma_{t_0}) = 1$$

ou

$$W^{-1}(\Gamma_{-L})W^{-1}(\Gamma_t)W(\Gamma_L)W(\Gamma_{t_0}) = 1$$

ou ainda

$$W(\Gamma_t) = W(\Gamma_L)W(\Gamma_{t_0})W^{-1}(\Gamma_{-L}) \quad (2.3.64)$$

Impondo que

$$A_t(-L, t) = A_t(L, t) \quad (2.3.65)$$

obtéem-se

$$W(\Gamma_L) = W(\Gamma_{-L})$$

daí

$$Tr(W(\Gamma_t))^N = Tr(W(\Gamma_{t_0}))^N \quad (2.3.66)$$

de modo que traços de potências de  $W$  integradas no espaço de  $-L$  até  $L$  são quantidades conservadas no tempo. Estas cargas conservadas são obtidas dos traços de

$$W(\Gamma_L) = Pexp\left(\int_{-L}^L dx A_x\right) \quad (2.3.67)$$

A curvatura nula  $F_{\mu\nu} = 0$  em duas dimensões é portanto uma lei de conservação .

O número de cargas depende da dimensão da álgebra onde  $A_\mu$  vive. Geralmente estas cargas são não-locais mas, em muitos casos, é possível fazer uma transformação de gauge e colocar  $A_\mu$  em uma subálgebra abeliana. Desta maneira o ordenamento no caminho passa a ser desnecessário e as cargas se tornam locais.

Sob uma transformação de gauge

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \quad (2.3.68)$$

nota-se que

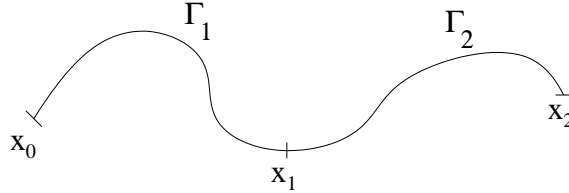
$$\begin{aligned} \frac{dW'}{d\sigma} + A'_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W' &= \frac{dW'}{d\sigma} + g A_\mu g^{-1} W' \frac{dx^\mu}{d\sigma} - \partial_\mu g g^{-1} W' \frac{dx^\mu}{d\sigma} \\ &= g \left( g^{-1} \frac{dW'}{d\sigma} - g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} W' \frac{dx^\mu}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} g^{-1} W' \right) \\ &= g \left( \frac{d(g^{-1} W')}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} (g^{-1} W') \right) \end{aligned} \quad (2.3.69)$$

Portanto, através de (2.3.69) tem-se que:

$$W \rightarrow W' = g W \bar{g}^{-1} \quad (2.3.70)$$

onde  $\bar{g}$  é um elemento independente de  $\sigma$ .

Tomando duas curvas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , unidas em  $x_1$



tem-se que

$$\begin{aligned} W(\Gamma_1) &\rightarrow g(x_1) W(\Gamma_1) \bar{g}_1^{-1} \\ W(\Gamma_2) &\rightarrow g(x_2) W(\Gamma_2) \bar{g}_2^{-1} \\ W(\Gamma) &\rightarrow g(x_2) W(\Gamma) \bar{g}^{-1} \end{aligned} \quad (2.3.71)$$

como

$$W(\Gamma) = W(\Gamma_2) W(\Gamma_1) \quad (2.3.72)$$

nota-se que

$$\bar{g}_2^{-1} = g(x_1)$$

consequentemente sob uma transformação de gauge (2.3.68) percebe-se que  $W$  para uma curva  $\Gamma$  transforma como

$$W \rightarrow g(x_1)Wg^{-1}(x_0) \quad (2.3.73)$$

no caso de uma curva fechada, a transformação será

$$W \rightarrow g(x_0)Wg(x_0)^{-1} \quad (2.3.74)$$

sendo assim  $TrW^\mu$  é invariante de gauge.

No caso das cargas (2.3.66) e (2.3.67) também há invariancia de gauge pois para que sejam mantidas as equações de contorno (2.3.65) precisa-se que

$$g(L) = g(-L) \quad (2.3.75)$$

e daí, de (2.3.67)

$$W(\Gamma_L) \rightarrow g(L)W(\Gamma_L)g^{-1}(-L) = g(L)W(\Gamma_L)g^{-1}(L)$$

e  $Tr W(\Gamma_L)^N$  é invariante de gauge.

## Capítulo 3

### Teorias Integráveis em $d+1$ Dimensões

#### 3.1 A Generalização da Condição de Curvatura Nula para Dimensões mais Altas

A idéia básica de uma teoria integrável em dimensão qualquer é a de se generalizar a representação de curvatura nula em  $(1 + 1)$  dimensões para espaços-tempo de dimensão  $(d + 1)$  através da introdução de uma conexão  $d$ -forma [2]. Este método já foi utilizado para estudar teorias como Yang-Mills auto-dual, equações de Bogomolny, modelos sigma não lineares e modelos do tipo Skyrme. A versão local da generalização da curvatura nula envolve uma álgebra de Lie e uma representação da mesma, levando a um número de leis de conservação igual ao número de dimensões da representação .

Vai-se utilizar neste método o fato de que a curvatura nula (2.2.21) é a condição suficiente para que a integral ordenada no caminho

$$P \exp \left( \int_{\tau} A_{\mu} dx^{\mu} \right) \quad (3.1.1)$$

seja independente do caminho.

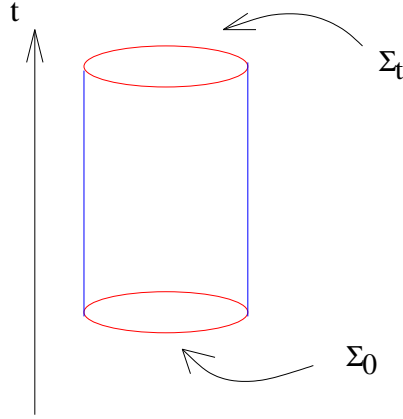
Em um espaço tempo de dimensão  $(d + 1)$  quer-se construir a curvatura nula como a condição para que integrais ordenadas em superfícies de dimensão  $d$

$$\mathcal{P} \exp \left( \int_{\tau} A_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \dots dx^{\mu_d} \right) \quad (3.1.2)$$

sejam independentes da superfície. Usando esta condição , pode-se chegar a cargas conservadas de modo análogo ao do caso bidimensional.

Em  $2 + 1$  dimensões, por exemplo, a integral em uma superfície fechada seria igual a 1, pois poderia ser contraída a um ponto.





Tomando o cilindro que tem na base e no extremo os discos  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_t$  respectivamente e cuja altura seja o eixo temporal. Pode-se escolher condições de contorno através das quais se obtém que as integrais nos discos sejam iguais. Como os discos estão em tempos distintos obtiveram-se leis de conservação .

O problema para a implementação dessa idéia consiste no fato de que a condição para se obter (2.2.21) independente da superfície é altamente não- local. De modo a contornar esse problema, introduz-se uma 1-forma  $A_\mu$  além da d- forma  $A_{\mu_1 \dots \mu_d}$ .

Vai-se estudar agora o caso em  $(2 + 1)$  dimensões. Seja uma superfície  $\Sigma$  com borda  $\Gamma$ . Introduz-se um vetor  $A_\mu$  e um tensor antisimétrico  $B_{\mu\nu}$ , define-se então uma quantidade  $V$  em  $\Sigma$  através da equação diferencial

$$\frac{dV}{d\tau} - V\Upsilon(B, A, \tau) = 0 \quad (3.1.3)$$

onde

$$\Upsilon(B, A, \tau) = \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (3.1.4)$$

$W$  é construído partir do vetor  $A_\mu$  do seguinte modo,

$$\frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0 \quad (3.1.5)$$

Faz-se então uma varredura de  $\Sigma$  com loops que começam e terminam em  $x_0 \in \Gamma$ . Os pontos dos loops são parametrizados por  $\sigma$ , com  $\sigma = 0$  e  $\sigma = 2\pi$  correspondendo a  $x_0$ .

Os loops são parametrizados por  $\tau$ ,

$$\begin{aligned} \tau = 0 &\equiv \text{loop parametrizado em termos de } x_0 \\ \tau = 2\pi &\equiv \Gamma \text{ (borda)} \end{aligned}$$

Para que  $V$  não dependa da varredura escolhida impõe-se que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0 \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, d \quad (3.1.6)$$

Deste modo,  $W$  fica independente do caminho e o integrando de (3.1.4) torna-se uma função local do espaço-tempo. Tem-se, portanto

$$A_\mu = -\partial_\mu W W^{-1} \quad (3.1.7)$$

Ver-se-á agora o comportamento de  $V$  quando se varia a superfície  $\Sigma$  mantendo a borda  $\Gamma$  fixa.

A equação (3.1.3) nos dá

$$\frac{d(VV^{-1})}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{d\tau}V^{-1} + V\frac{dV^{-1}}{d\tau} = 0 \quad (3.1.8)$$

assim,

$$\frac{dV^{-1}}{d\tau} + \Upsilon V^{-1} = 0 \quad (3.1.9)$$

Variando (3.1.3)

$$\frac{d\delta V}{d\tau} - \delta V \Upsilon - V \delta \Upsilon = 0$$

daí,

$$\frac{d\delta V}{d\tau}V^{-1} - \delta V \Upsilon V^{-1} - V \delta \Upsilon V^{-1} = 0 \quad \text{onde } \Upsilon V^{-1} = \frac{-dV^{-1}}{d\tau}$$

ou

$$\frac{d(\delta V V^{-1})}{d\tau} = V \delta \Upsilon V^{-1} \quad (3.1.10)$$

Efetuando o cálculo de  $\delta V(\tau)V(\tau)^{-1}$ , obtém-se,

$$\begin{aligned} \delta V(\tau)V(\tau)^{-1} &= V(\tau) \left[ \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \right] V^{-1}(\tau) + \\ &+ \int_0^\tau d\tau' V(\tau') \left\{ \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} (D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} \right. \\ &+ D_\nu B_{\lambda\mu}) W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau'} \delta x^\lambda - + D_\nu B_{\lambda\mu}) W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau'} \delta x^\lambda \\ &\left. - \left[ \Upsilon(B, A, \tau'), \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \right] \right\} V^{-1}(\tau') \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

onde

$$D_\lambda B_{\mu\nu} = \partial_\lambda B_{\mu\nu} + [A_\lambda, B_{\mu\nu}] \quad (3.1.12)$$

Considerando agora o caso em que  $\Sigma$  é uma superfície fechada, ou seja  $\Gamma$  colapsou a  $x_0$ . Ir-se-á denotar  $\Omega$  ao volume cuja borda é  $\Sigma$ .

Pode-se agora varrer o volume  $\Omega$  com superfícies fechadas que tenham em comum o ponto  $x_0$ . Tais superfícies podem ser parametrizadas por  $\zeta$ , tal que  $\zeta = 0$  corresponde a  $x_0$  e  $\zeta = 2\pi$  corresponde a  $\Sigma$ .

Varrer esse volume corresponde a olhar as deformações dessas superfícies fechadas. Denota-se então, de modo análogo a (1.3.58):

$$\delta = d\zeta \frac{d}{d\zeta} \quad (3.1.13)$$

O primeiro termo do lado direito de 3.1.11 é nulo para  $\tau = 2\pi$ , visto que

$$\delta x^\nu(\tau = 2\pi) = 0$$

de modo que a equação agora fica

$$\frac{dV_c}{d\zeta} - \left( \int_0^{2\pi} d\tau V K V^{-1} \right) V_c = 0 \quad (3.1.14)$$

onde  $V_c$  denota  $V$  definido em uma superfície fechada, e onde:

$$K = \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} (D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu}) W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau \frac{dx^\lambda}{d\zeta}} - [\top(B, A, \tau), \top(B, A, \zeta)] \quad (3.1.15)$$

Esta é a curvatura no caso de  $(2 + 1)$  dimensões e a condição de curvatura nula é

$$K = 0 \quad (3.1.16)$$

Esta condição implica que  $V_c$  é independente da superfície, ou seja

$$V_c = 1 \quad (3.1.17)$$

posto que a superfície pode ser contraída ao ponto  $x_0$ , desde que o espaço-tempo não tenha buracos ou alças.

De modo análogo ao caso bidimensional, a condição (3.1.16) - ou (3.1.17) - é uma lei de conservação, desde que as condições de contorno impostas sejam apropriadas. Contudo, a condição (3.1.16) é não-local pois o primeiro termo em (3.1.15) possui uma integral em  $\sigma$  enquanto que o segundo termo tem duas integrais.

Vai-se utilizar o conceito de espaço de loops para formular essas idéias. Dado um espaço-tempo  $M$ , de dimensão  $(2+1)$ , considera-se o espaço do mapeamento do círculo  $S'$  em  $M_0$  tal que  $x_0$  seja a imagem de um ponto fixo de  $S'$ , ou seja

$$\Omega(M, x_0) = \{\gamma : S' \rightarrow M | \gamma(0) = x_0\} \quad (3.1.18)$$

O espaço dos loops tem dimensão infinita porque é necessário um número infinito de parâmetros para parametrizar estes mapeamentos.

Uma conexão 1- forma em  $\Omega$  é definida como

$$\mathcal{A}(x(\sigma)) = \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1}(\sigma) B_{\mu\nu}(x(\sigma)) W(\sigma) \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu(\sigma) \quad (3.1.19)$$

onde  $B_{\mu\nu}$  e  $W$  são os mesmos vistos anteriormente e  $\delta x^\nu$  é o diferencial no espaço dos loops que dá o caráter de (1- forma) a  $\mathcal{A}(x(\sigma))$ .

Tomando-se  $A_\mu$  em um espaço de curvatura nula, onde vale (2.1.6), é possível mostrar que a condição de curvatura nula dada por

$$\mathcal{F} = \delta\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = 0 \quad (3.1.20)$$

corresponde a (3.1.16).

Pode-se concluir então que a condição de curvatura nula é local no espaço dos loops e temos assim condições parecidas com as do caso bidimensional.

Para  $(d+1)$  dimensões são considerados os mapeamentos de  $S^{d-1}$  - esfera  $(d-1)$  dimensional - em  $M$ ,

$$\Omega^{d-1}(M, x_0) \equiv \{\gamma : S^{d-1} \rightarrow M | \gamma(0) = x_0\} \quad (3.1.21)$$

A conexão é definida de maneira análoga a (3.1.19), onde  $B_{\mu\nu}$  é substituído por uma d- forma e a condição de curvatura nula é (3.1.20). Vê-se assim que a generalização da curvatura nula para mais dimensões implica no uso de espaços de loops.

Não é difícil perceber que em  $(1+1)$  dimensões o espaço dos loops coincide com  $M$  pois o mapeamento foi tomado de  $S^0$  em  $M$ .

O problema da não-localidade pode ser contornado procurando-se condições locais que sejam suficientes para satisfazer (3.1.20) ou (3.1.16).

Considere uma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  e uma representação  $R$  dela. Constrói-se então álgebra não-semisimples  $\mathcal{G}_R$ , do tipo Poicaré, por

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= f_{ab}^c T_c \\ [T_a, P_i] &= P_j R_{ij}(T_a) \\ [P_i, P_j] &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Da identidade de Jacobi,

$$[T_a, [T_b, P_i]] + [P_i, [T_a, T_b]] + [T_b, [P_i, T_a]] = 0$$

pode-se obter que

$$P_k R_{kj}(T_a) R_{ji}(T_b) - f_{ab}^c P_k R_{ki}(T_c) - P_k R_{kj}(T_b) R_{ji}(T_a) = 0$$

ou seja

$$R(T_a) \cdot R(T_b) - R(T_b) \cdot R(T_a) = f_{ab}^c R(T_c) \quad (3.1.23)$$

onde as matrizes  $R$  formam uma representação da álgebra  $\mathcal{G}$

Toma-se agora

$$A_\mu = A_\mu^a T_a \quad (3.1.24)$$

$$B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}^i P_i \quad (3.1.25)$$

Como  $\mathcal{P}$  é uma subálgebra invariante segue que,

$$W^{-1} B_{\mu\nu} W \in \mathcal{P} \quad (3.1.26)$$

uma vez que  $W$  é um elemento do grupo cuja álgebra é  $\mathcal{G}$ . Consequentemente,

$$\top(B, A, \tau) \in \mathcal{P} \quad (3.1.27)$$

e

$$[\top(B, A, \tau), \top(B, A, \tau)] = 0 \quad (3.1.28)$$

de (3.1.15) vê-se que a condição

$$D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu} = 0 \quad (3.1.29)$$

é satisfeita para que (3.1.16) seja satisfeita.

Introduz-se agora o dual

$$\tilde{B}_\mu \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} B^{\nu\rho} \quad (3.1.30)$$

as condições locais de curvatura nula, fornecidas por (3.2.47) e (3.1.6), são

$$D^\mu \tilde{B}_\mu = 0 \quad F_{\mu\nu} = 0 \quad (3.1.31)$$

Em mais dimensões as condições de curvatura nula são as mesmas que em (3.1.31) pois o dual de uma  $d$ -forma em  $(d+1)$  é uma 1-forma. Quando se tem mais dimensões há a possibilidade de se introduzir 1-forma, 2-formas, ... até  $d$ -formas tornando (3.1.31) mais complexa.

As condições (3.1.31) são invariantes sob as seguintes transformações

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \\ B_{\mu\nu} &\rightarrow gB_{\mu\nu} g^{-1} \quad g \in e^{\mathcal{G}} \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

ou

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu \\ B_{\mu\nu} &\rightarrow B_{\mu\nu} + D_\mu \alpha_\nu - D_\nu \alpha_\mu \quad \alpha_\mu \in P \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

Essas transformações não comutam e geram uma álgebra isomórfica a  $\mathcal{G}_R$  dada em (3.1.22).

Em mais dimensões a transformação (3.1.33), torna-se

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu \\ B &\rightarrow B + D\Lambda\alpha \equiv \tilde{B}_\mu + D^\nu \tilde{\alpha}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

onde foi introduzido o dual  $\tilde{\alpha}_{\mu\nu} \equiv \varepsilon_{\mu\nu\mu_2\dots\mu_d}$ ,  $B$  é uma  $d$ -forma e  $\alpha$  é uma  $d-1$ -forma. Para que (3.1.33) e (3.1.34) sejam simetrias é importante que  $A_\mu$  seja chato, ou seja

$$[D_\mu, D_\nu] = 0$$

As correntes

$$J^\mu \equiv W^{-1} \tilde{B}^\mu W \quad (3.1.35)$$

são conservadas, visto que

$$D^\mu \tilde{B}_\mu = 0 \Rightarrow \partial^\mu J_\mu = 0 \quad (3.1.36)$$

Logo, como  $J_\mu \in P$ , o número de correntes conservadas é igual à dimensão da representação  $R$  de  $\mathcal{G}$ . Tais correntes são invariantes sob as tranformações (3.1.32) mas, sob (3.1.34) elas se tranformam como

$$J_\mu \rightarrow J_\mu + \varepsilon_{\mu\mu_1\dots\mu_d} \partial^{\mu_1} (W^{-1} \alpha^{\mu_2\dots\mu_d} W) = J_\mu + \partial^\nu (W^{-1} \tilde{\alpha}_{\mu\nu} W) \quad (3.1.37)$$

## 3.2 Submodelos Integráveis

O número de correntes conservadas - que pode ser obtido através de (3.1.35) - é igual à dimensão da representação de  $\mathcal{G}$  definida pelos geradores  $P_i$  de  $\mathcal{G}_R$ . Deste modo a noção de integrabilidade fica relacionada às representações de dimensão infinita ou, de modo equivalente, às álgebras de Lie não semisimples de dimensão infinita do tipo (3.1.22). Isto é semelhante ao caso bidimensional onde a aparência de um número infinito de cargas estava ligada a álgebras de Lie de dimensão infinita. Entretanto, no caso bidimensional as álgebras eram, em geral, álgebras do tipo afim e a sua importância na teoria de sólitons e nos métodos exatos de construção de soluções . Não se sabe ainda o quanto as estruturas algébricas do tipo (3.1.22) são importantes, mas acredita-se que tais estruturas tenham profundas consequências no estudo de teorias integráveis em dimensão qualquer.

É bem sabido que condições como auto-dualidade em teorias de Yang-Mills e equações de Bogomolny em teorias de gauge com quebra espontânea de simetria por um bóson de Higgs na representação adjunta, são de fundamental importância na construção de submodelos. Estes submodelos apresentam propriedades que lhes permitem ser solucionados e tais propriedades não aparecem quando se toma todo o modelo. No caso das teorias de Yang-Mills auto-duais, essas condições levam à saturação no limite da ação Euclidiana e no caso das equações à saturação no limite da energia.

Vai-se apresentar aqui estrutura um tanto diferente das dos casos anteriores mas que leva a condições para submodelos integráveis apesar de, aparentemente, não levarem à saturação de limites [13].

Supondo que usando as simetrias de gauge (3.1.32) e (3.1.34) possa-se encontrar um gauge no qual a conexão  $A_\mu$  pode ser escrita como

$$A_\mu = A_\mu^S + A_\mu^K \quad (3.2.38)$$

onde  $A_\mu^S$  e  $A_\mu^K$  são as componentes de  $A_\mu$  na decomposição

$$\mathcal{G} = S + K \quad (3.2.39)$$

onde  $K$  é um subálgebra de  $\mathcal{G}$  e  $S$  é o seu complemento em  $\mathcal{G}$ . Vai-se supor também que

$$[A_\mu^S, \tilde{B}^\mu] = 0 \quad (3.2.40)$$

Deste modo a curvatura nula (3.1.31) torna-se

$$\partial^\mu \tilde{B}_\mu + [A^{\mu K}, \tilde{B}_\mu] = (\partial^\mu \tilde{B}_{\mu,i} + A_a^{\mu K} \tilde{B}_{\mu,j} R(K_a)_{i,j}) P_i \quad (3.2.41)$$

onde  $A^{\mu K} = A_a^{\mu K} K_a$ , com  $K_a$  sendo os geradores de  $K$ , e  $R(K_a)_{i,j}$  sendo a representação matricial de  $K$  definida pelos  $P_i$ , isto é

$$[K_a, P_i] = P_j R(K_a)_{j,i} \quad (3.2.42)$$

Sendo assim, a curvatura nula é determinada somente pela representação de  $K$  definida no subespaço  $\mathcal{P}$ . Esta representação é, em geral, redutível de modo que  $R$  pode ser denotada por

$$R = \sum_l R_l^K \quad (3.2.43)$$

onde  $R_l^K$  são as representações irredutíveis de  $K$ .

Supondo agora que uma dada representação  $R^\lambda$  de  $\mathcal{G}$  apresenta a seguinte regra de decomposição

$$R^\lambda = \sum_l R_l^K + \text{outros termos} \quad (3.2.44)$$

Introduz-se então o operador

$$\tilde{B}_\mu^\lambda \equiv \tilde{B}_{\mu,i} P_i^\lambda \quad (3.2.45)$$

onde  $\tilde{B}_{\mu,i}$  são os mesmos coeficientes que aparecem na expansão do  $\tilde{B}_\mu$  original em termos da base  $P_i$  da representação  $R$  de  $\mathcal{G}$ , ou seja  $\tilde{B}_\mu = \tilde{B}_{\mu,i} P_i$ .  $P_i^\lambda$  são os geradores de  $\mathcal{G}_{R^\lambda}$ , associados à representação  $R^\lambda$ , correspondentes ao subespaço  $\sum_l R_l^K$  e se transformam exatamente como os  $P_i$  sob uma subálgebra  $K$ , ou seja

$$[K_a, P_i^\lambda] = P_j^\lambda R(K_a)_{ji} \quad (3.2.46)$$

Sendo assim, pode-se fazer

$$\begin{aligned} D^\mu \tilde{B}_\mu^\lambda &= \partial^\mu \tilde{B}_\mu^\lambda + [A^\mu, \tilde{B}_\mu^\lambda] \\ &= (\partial^\mu \tilde{B}_{\mu,i} + A_a^{\mu K} \tilde{B}_{\mu,j} R(K_a)_{ij}) P_i^\lambda \\ &\quad + [A_a^{\mu S}, \tilde{B}_\mu^\lambda] \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

É importante perceber que em (3.2.47) o primeiro termo depois da última igualdade corresponde à curvatura nula na teoria em consideração, nomeada por (3.2.41). Consequentemente, caso seja imposto o vínculo

$$[A^{\mu S}, \tilde{B}_\mu^\lambda] = A_r^{\mu S} \tilde{B}_\mu^\lambda [S_r, P_i^\lambda] = 0 \quad (3.2.48)$$



com  $S_r$  sendo os geradores do subespaço  $S$ , pode-se chegar a um submodelo cujo número de correntes conservadas será dado por

$$J_\mu^\lambda \equiv W^{-1} \tilde{B}_\mu^\lambda W \quad (3.2.49)$$

Supondo agora que exista um número infinito de representações como  $R^\lambda$ , que satisfaçam (3.2.44) de tal modo que as condições (3.2.48) imponham o mesmo conjunto de restrições ao modelo. Sendo assim o submodelo definido pelas equações (3.2.41) e pelas restrições (3.2.48) possui um número infinito de correntes conservadas locais.

Um caso importante de aplicação da construção descrita acima é quando a representação de  $\mathcal{G}$  definida pelos  $P_i$  possui ao menos um singlete de carga nula da subálgebra  $K$ , ou seja: existe na subálgebra  $\mathcal{P}$  um gerador  $P_\Lambda$ , tal que

$$[K_a, P_\Lambda] = 0 \quad (3.2.50)$$

Assim pode-se construir facilmente representações que satisfaçam (3.2.44) considerando produtos tensoriais da representação  $R$  - definida pelos  $P_i$  - com ela mesma. Os subespaços dados pelos produtos tensoriais de  $R$  com os singletos  $P_\Lambda$  transformam do mesmo modo que  $\sum_l R_l^K$ . Por exemplo, no caso de  $R \otimes R$  o produto tensorial  $P_\Lambda \otimes R$ , que é equivalente a  $R \otimes P_\Lambda$ , satisfaz

$$[1 \otimes K_a + K_a \otimes 1, P_\Lambda \otimes P_i] = P_\Lambda \otimes P_j R(K_a)_{ji} \quad (3.2.51)$$

Para o caso de  $(\otimes R)^n$  qualquer representação da forma  $(\otimes P_\Lambda)^l \otimes R(\otimes P_\Lambda^{n-l-1})$  é equivalente  $R$  (visto como representações da subálgebra  $K$ ).

Introduz-se então os potenciais

$$\begin{aligned} A_\mu^{(n)} &\equiv A_\mu^\alpha \sum_{l=0}^{n-1} (\otimes 1)^l \otimes T_a (\otimes 1)^{n-l-1} \\ \tilde{B}_\mu^{(n)} &\equiv B_{\mu,l} \sum_{l=0}^{n-1} c_{n,l} (\otimes P_\Lambda)^l \otimes P_i (\otimes P_\Lambda)^{n-l-1} \end{aligned} \quad (3.2.52)$$

onde se denotou  $A_\mu = A_\mu^\alpha T_a$ , com  $T_a$  sendo os geradores de  $\mathcal{G}$  e onde  $c_{n,l}$  são constantes. As constantes foram introduzidas porque desse modo pode-se reescalar a base de cada componente irreduzível das representações de  $K$  independentemente, sem que as equações (3.2.41) sejam afetadas. Somente os vínculos são afetados pelas constantes  $c_{n,l}$ .

É importante notar que a curvatura  $F_{\mu\nu}^{(n)}$  associada à conexão  $A_\mu^{(n)}$  some como consequência do fato de  $A_\mu$  ser chato. Deste modo a primeira condição em (3.1.31) leva, neste caso, às mesmas equações vistas em (3.2.41), isto é

$$\partial^\mu \tilde{B}_{\mu,i} + A_a^{\mu K} \tilde{B}_{\mu,j} R(K_a)_{i,j} = 0 \quad (3.2.53)$$

e os vínculos são

$$A_\mu^{S,r} \tilde{B}_i^\mu \left[ \left( \sum_{m=0}^{n-1} (\otimes 1)^m \otimes S_r (\otimes 1)^{n-m-1} \right), \left( \sum_{l=0}^{n-1} c_{n,l} (\otimes P_\Lambda)^l \otimes P_j (\otimes P_\Lambda)^{n-l-1} \right) \right] = 0 \quad (3.2.54)$$

Deste modo, desde que (3.2.53) sejam as mesmas equações que (3.2.41), tem-se um submodelo e a subclasse de soluções determinada pelos vínculos (3.2.54).

As correntes conservadas obtidas da curvatura nula são

$$J_\mu^{\lambda(n)} \equiv (\otimes W^{-1})^n \tilde{B}_\mu^{(n)} (\otimes W)^n \quad (3.2.55)$$

Pode-se então escolher as constantes  $c_{n,l}$  de modo que (3.2.54) imponha os mesmos vínculos para todos os valores de  $n$ , assim o submodelo correspondente possui um número infinito de correntes conservadas

### 3.3 O Exemplo do Modelo $CP^1$

Vai-se mostrar aqui que as equações clássicas de movimento do modelo  $CP^1$  em 2+1 dimensões podem ser escritas como (3.1.31), o que dá condições suficientes para que  $V$ , introduzido em (3.1.3) seja independente da superfície.

O modelo  $CP^1$  tem um campo escalar complexo  $u$  e sua equação de movimento é dada por

$$(1 + |u|^2) \partial^2 u = 2u^* (\partial_\mu u) (\partial^\mu u) \quad (3.3.56)$$

onde se utilizou a notação  $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2$ .

Esta equação de movimento pode ser obtida a partir da Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu u \partial^\mu u^*}{(1 + |u|^2)^2} \quad (3.3.57)$$

O modelo é invariante sob a ação de  $SO(3)$ . Associada com a isometria

$$u \rightarrow e^{i\tau} u \quad (3.3.58)$$

tem-se então a corrente de Noether

$$J_\mu^{Noet.} = \frac{1}{(1 + |u|^2)^2} (u^* \partial_\mu u - u \partial_\mu u^*) \quad (3.3.59)$$

Há mais duas correntes de Noether conservadas vindas das isometrias remanescentes. Elas são a parte real e a parte imaginária da corrente

$$j_\mu = \frac{\partial_\mu u + u^2 \partial_\mu u^*}{(1 + |u|^2)^2} \quad (3.3.60)$$

Este modelo possui carga topológica dada por

$$J_\mu^{Top.} \equiv -\frac{i}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \frac{\partial^\nu u^* \partial^\lambda u}{(1 + |u|^2)^2} \quad (3.3.61)$$

É importante notar que a Lagrangeana e as equações de movimento do modelo  $CP^1$  são invariantes sob a simetria discreta

$$u \rightarrow \frac{1}{u} \quad (3.3.62)$$

O modelo  $CP^1$  é equivalente ao modelo sigma do  $O(3)$  que é formulado em termos de três campos escalares reais  $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ . Define-se este modelo a partir da Lagrangeana e do vínculo abaixo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g} (\partial_\mu \vec{u})^2 \quad (\phi^2) = 1 \quad (3.3.63)$$

Adicionando-se à Lagrangeana um multiplicador de Lagrange  $\lambda((\phi^2) - 1)$ , consegue-se as seguintes equações de movimento

$$\partial^2 \phi + (\partial_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi) \phi = 0 \quad (3.3.64)$$

O modelo sigma de  $O(3)$  é invariante sob as transformações globais de  $SO(3)$ ,  $\phi \rightarrow M \cdot \phi$ , com  $M$  sendo matrizes 3 x 3 ortogonais. Pode-se escrever  $M$  como  $M = \exp(i\omega_j T_j)$ , com  $[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk} T_k$ . Sendo assim, as cargas de Noether correspondentes serão dadas por

$$j_\mu^i \equiv \varepsilon^{ijk} \phi^j \partial_\mu \phi^k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.3.65)$$

Note que essas correntes têm a restrição

$$\sum_{i=1}^3 \phi^i j_\mu^i = 0 \quad (3.3.66)$$

Para relacionar os modelos  $CP^1$  e sigma do  $O(3)$ , deve-se fazer a projeção estereográfica. Toma-se o tri-vetor unitário  $\vec{u}$  escrito em coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \phi_x &= \sin \tau \cos \Phi \\ \phi_y &= \sin \tau \sin \Phi \\ \phi_z &= \cos \tau \end{aligned} \quad (3.3.67)$$

Projetando a esfera no plano

$$\begin{aligned} 2\tilde{\tau} + \tau &= \pi \\ \tilde{\tau} &= \frac{\pi}{2} - \frac{\tau}{2} \\ \tan \tilde{\tau} &= \cot \frac{\tau}{2} \end{aligned} \quad (3.3.68)$$

Um ponto  $(\theta, \Phi)$  na esfera corresponde a um ponto  $(u_1, u_2)$  no plano

$$\begin{aligned} u_1 &= \tan \tilde{\tau} \cos \Phi = \cot \frac{\tau}{2} \cos \Phi \\ u_2 &= \tan \tilde{\tau} \sin \Phi = \cot \frac{\tau}{2} \sin \Phi \end{aligned} \quad (3.3.69)$$

Define-se agora o campo complexo

$$\omega = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{1 - \phi_3} \quad (3.3.70)$$

substituindo os valores de  $u$ , tem-se então

$$\omega = \frac{\sin \tau e^{i\Phi}}{1 - \cos \tau} = \cot \frac{\tau}{2} e^{i\Phi} = u_1 + iu_2 \quad (3.3.71)$$

o campo  $\omega$  é a projeção estereográfica de  $\vec{\Phi}$ .

Deste modo

$$u \equiv u_1 + iu_2 = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{1 - \phi_3} \quad (3.3.72)$$

o campo  $\phi$  pode ser escrito como

$$\phi = \frac{1}{1 + |u|^2} (u + u^*, -i(u - u^*), |u|^2 - 1) \quad (3.3.73)$$

Substituindo-se (3.3.72) em (3.3.56) pode-se verificar facilmente que o modelo  $CP^1$  é de fato equivalente ao modelo sigma de  $O(3)$ .

Estes modelos possuem cotas do tipo Bogomolny que levam a equações diferenciais de primeira ordem. Belavin e Polyakov [5] mostraram que o funcional da energia

$$E = \int d^2x ((\partial_0 \phi)^2 + (\partial_m \phi)^2) \quad m = 1, 2 \quad (3.3.74)$$

satisfaz o limite  $E \geq 8\pi Q$ , onde  $Q$  é a carga topológica, dada por

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnp} \phi_i \partial_m \phi_j \partial_n \phi_k \quad (3.3.75)$$

com  $i, j, k = 1, 2, 3$  e  $m, n = 1, 2$ . As condições que saturam o limite, são

$$\begin{aligned}\partial_0 \phi_i &= 0 \\ \partial_m \phi_i &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mn} \phi_j \partial_n \phi_k\end{aligned}\quad (3.3.76)$$

Quaisquer soluções destas equações diferenciais de primeira ordem são também soluções do modelo sigma de  $O(3)$ . Em termos de campos  $u$  estáticos, as equações (3.3.76) são equações de Cauchy-Riemann

$$\partial_{x_1} u_1 = \partial_{x_2} u_2 \quad \partial_{x_2} u_1 = -\partial_{x_1} u_2 \quad (3.3.77)$$

sendo assim qualquer função meromórfica leva a uma solução estática do modelo  $CP^1$ .

Uma solução de particular interesse é a de baby-Skyrmion que tem uma unidade de carga topológica e corresponde a

$$u = x_1 + ix_2 \quad (3.3.78)$$

ou, em termos de  $\phi$

$$\phi = \left( \frac{x_1}{r} \sin f(r), \frac{x_2}{r} \sin f(r), \cos f(r) \right); \quad r^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 \quad (3.3.79)$$

com

$$f(r) = 2 \arctan \frac{1}{r} \quad (3.3.80)$$

Vai-se agora mostrar que o modelo  $CP^1$  constitui um exemplo das condições de integrabilidade local (3.1.31). Introduzindo os potenciais

$$A_\mu = \frac{1}{(1 + |u|^2)} (-i \partial_\mu u T_+ - i \partial_\mu u^* T_- + (u \partial_\mu u^* - u^* \partial_\mu u) T_3) \quad (3.3.81)$$

$$\tilde{B}_\mu = \frac{1}{(1 + |u|^2)} (\partial_\mu u P_1^{(1)} - \partial_\mu u^* P_{-1}^{(1)}) \quad (3.3.82)$$

onde  $T_3, T_\pm$  são os geradores da álgebra  $sl(2)$

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm, \quad [T_+, T_-] = 2T_3 \quad (3.3.83)$$

e  $P_1^{(1)}, P_{-1}^{(1)}$  - juntamente com  $P_0^{(1)}$  - transformam de acordo com a representação tripleto dessa álgebra. As relações de comutação associadas a uma representação genérica do  $sl(2)$  de spin  $j$ , com  $(m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j)$ , são dadas por

$$[T_3, P_m^{(j)}] = m P_m^{(j)} \quad (3.3.84)$$

$$[T_\pm, P_m^{(j)}] = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} P_{m \pm 1}^{(j)} \quad (3.3.85)$$

$$[P_m^{(j)}, P_m^{(j')}] = 0 \quad (3.3.86)$$

Não é difícil checar que o potencial (3.3.81) é chato independentemente das equações de movimento do modelo  $CP^1$

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{na camada de massa}) \quad (3.3.87)$$

Na verdade, (3.3.81) pode ser escrito como

$$A_\mu = -\partial_\mu WW^{-1}$$

com várias escolhas de  $W$ . Duas escolhas bastante úteis são

$$W \equiv W_1 = e^{iuT_+} e^{\varphi T_3} e^{iu^* T_-}; \quad \text{e} \quad W \equiv W_2 = e^{iu^* T_-} e^{-\varphi T_3} e^{iuT_+} \quad (3.3.88)$$

onde  $\varphi = \ln(1 + |u|^2)$ .

Por outro lado, é possível ver que outro modo de escrever as equações de movimento do modelo  $CP^1$  é:

$$D_\mu \tilde{B}^\mu = 0 \quad (\text{na camada de massa}) \quad (3.3.89)$$

As correntes conservadas (3.1.35), neste caso usando  $W = W_1$  ou  $W = W_2$ , são

$$J_\mu = W^{-1} \tilde{B}_\mu W = j_\mu P_1^{(1)} - i\sqrt{2} J_\mu^{Noet.} P_0^{(1)} - j_\mu^* P_1^{(-1)} \quad (3.3.90)$$

onde  $J_\mu^{Noet.}$  e  $j_\mu$  são dadas respectivamente por (3.3.59) e (3.3.60).

### 3.3.1 Um submodelo do $CP^1$

Para se obter (3.3.89) foi importante que  $P_1^{(1)}$  fosse o mais alto e que  $P_1^{(-1)}$  fosse mais baixo estado de spin da representação. Esta condição deixa de ser necessária ao se introduzir

$$\tilde{B}_\mu^{(j)} = \frac{1}{(1 + |u|^2)} (\partial_\mu u P_1^{(j)} - \partial_\mu u^* P_{-1}^{(j)}); \quad \text{com } j \text{ inteiro e } j \geq 1 \quad (3.3.91)$$

não é difícil verificar que  $D_\mu \tilde{B}^{\mu(j)} = 0$ , com  $A_\mu$  sendo o mesmo que em (3.3.81):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{(1 + |u|^2)^2} \{ \sqrt{j(j+1)} (-i\partial_\mu u \partial^\mu u P_{+2}^{(j)} + i\partial_\mu \bar{u} \partial^\mu \bar{u} P_{-2}^{(j)}) \\ &+ ((1 + |u|^2)^2 \partial^2 u - 2\bar{u} \partial_\mu u \partial^\mu u) P_{+1}^{(j)} + ((1 + |u|^2)^2 \partial^2 \bar{u} - 2u \partial_\mu \bar{u} \partial^\mu \bar{u}) P_{-1}^{(j)} \} \end{aligned} \quad (3.3.92)$$

quando  $j = 1$ , tem-se as equações de movimento do  $CP^1$ .

Por outro lado, para todo  $j > 1$ , nota-se que  $D_\mu \tilde{B}^{\mu(j)} = 0$  são equações de movimento do submodelo  $CP^1$  [22]

$$\partial^2 u = 0; \quad \partial_\mu u \partial^\mu u = 0 \quad (3.3.93)$$

Qualquer solução das equações acima é solução do modelo  $CP^1$ . Contrariamente, pode-se verificar que qualquer solução estática das equações de Cauchy-Riemann ou das equações de Belavin-Polyakov (3.3.77) é solução estática de (3.3.93). De fato o baby-Skyrmion (3.3.78) resolve (3.3.93).

Então, o número de correntes conservadas (dado por (3.2.49)) é  $2j + 1$ . Desde que se tenha uma livre escolha de  $j$ , o número de correntes conservadas é infinito. Denotando

$$J_\mu^{(j)} = W^{-1} \tilde{B}_\mu^{(j)} W \equiv \sum_{m=-j}^j J_\mu^{(j,m)} P_m^{(j)} \quad (3.3.94)$$

A forma explícita das novas infinitas correntes conservadas é dada por elementos  $\mathcal{A}_{m,\pm 1}$  da ação adjunta  $W P_n^{(j)} W^{-1} = \sum_{m=-j}^j \mathcal{A}_{mn} P_m^{(j)}$ , que pode ser encontrada em livros como [16]:

$$J_\mu^{(j,m)} = \frac{\partial_\mu u \mathcal{A}_{m1} - \partial_\mu u^* \mathcal{A}_{m-1}}{(1 + |u|^2)} \quad (3.3.95)$$

No caso de  $j = 1$ , chega-se nos mesmos valores de  $J$  que em (3.3.90). Quando  $j = 2$ , tem-se

$$J_\mu^{(2,2)} = -\frac{2iu(\partial_\mu u + u^2 \partial_\mu u^*)}{(1 + |u|^2)^3} \quad (3.3.96)$$

$$J_\mu^{(2,1)} = \frac{(1 - 3|u|^2)\partial_\mu u + (3 - |u|^2)u^2 \partial_\mu u^*}{(1 + |u|^2)^3} \quad (3.3.97)$$

$$J_\mu^{(2,0)} = -\frac{i\sqrt{6}(1 - |u|^2)(u^* \partial_\mu u - u \partial_\mu u^*)}{(1 + |u|^2)^3} \quad (3.3.98)$$

com  $J_\mu^{(-2,m)} = (-1)^m J_\mu^{(2,m)\dagger}$ ,  $m = 1, 2$ . Para  $j = 3$ , fica-se com

$$J_\mu^{(3,3)} = -\frac{\sqrt{15}u^2(\partial_\mu u + u^2 \partial_\mu u^*)}{(1 + |u|^2)^4} \quad (3.3.99)$$

$$J_\mu^{(3,2)} = \frac{i\sqrt{10}u((-1 + 2|u|^2)\partial_\mu u + (-2 + |u|^2)u^2 \partial_\mu u^*)}{(1 + |u|^2)^4} \quad (3.3.100)$$

$$J_\mu^{(3,1)} = \frac{(1 - 8|u|^2 + 6|u|^4)\partial_\mu u + (6 - 8|u|^2 + |u|^4)u^2 \partial_\mu u^*}{(1 + |u|^2)^4} \quad (3.3.101)$$

$$J_\mu^{(3,0)} = -\frac{2i\sqrt{3}(1 - 3|u|^2 + |u|^4)(u^* \partial_\mu u - u \partial_\mu u^*)}{(1 + |u|^2)^4} \quad (3.3.102)$$

com  $J_\mu^{(3,-m)} = (-1)^m J_\mu^{(3,m)\dagger}$ ,  $m = 1, 2, 3$ .

O submodelo (3.3.93) tem outra representação para as condições de integrabilidade dadas por (3.1.31). Sejam  $P, Q$  e  $\mathbb{1}$  os geradores da álgebra de Heisenberg

$$[P, Q] = \mathbb{1} \quad (3.3.103)$$

Note que, de acordo com (3.1.22), toma-se  $\mathcal{G} = \{Q\}$  e  $R = \{P, \mathbb{1}\}$ . Definindo

$$A_\mu = g(u)\partial_\mu u Q, \quad \tilde{B}_\mu = f(u)\partial_\mu u P \quad (3.3.104)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções arbitrárias de  $u$ .

Pode-se verificar que  $A_\mu$  é chato, isto é  $F_{\mu\nu} = 0$ , e que

$$D_\mu \tilde{B}_\mu = \left( \frac{df}{du} \partial_\mu u \partial^\mu u + f \partial^2 u \right) P - fg \partial_\mu u \partial^\mu u \mathbb{1} \quad (3.3.105)$$

Deste modo, as soluções de (3.3.93) resolvem as equações (3.1.31).

As correntes conservadas obtidas nesta representação são da forma

$$J_\mu = G(u)\partial_\mu u \quad (3.3.106)$$

onde  $G(u)$  é qualquer função de  $u$  (mas não de  $u^*$ ). Tem-se que  $\partial_\mu J_\mu = 0$  como consequência das equações de movimento (3.3.93). O complexo conjugado de (3.3.106) fornece um outro conjunto de correntes conservadas.



## Capítulo 4

### Modelos de Skyrme-Faddeev

#### 4.1 Introdução

Em 1867 considerou-se pela primeira vez descrever as partículas elementares como sendo estruturas do tipo vórtices de tubos na forma de nós. Tal consideração foi feita por Lord Kelvin para descrever os átomos, na época considerados partículas elementares.

Apesar de a idéia de se descrever átomos como vórtices de tubos na forma de nós ter sido deixada de lado há muito tempo, esse tipo de estrutura tem se mostrado bastante útil em diversas áreas. Por exemplo, em QCD pode-se sugerir que um fluxo gluônico tubular que confina os quarks nos hadrons possa se emaranhar, sugerindo que na teoria de Yang-Mills pura fluxos tubulares fechados na forma de nós apareçam como estados físicos.

Para se estudar a dinâmica das configurações do tipo nó, é necessário tomar uma teoria de campos Lagrangeana na qual os nós possam aparecer como sólitons. De um modo geral, as equações de movimento que aparecem nesse tipo de teoria são altamente não-lineares de modo que até mesmo encontrar a Lagrangeana dessas teorias é um desafio em aberto.

#### 4.2 Dualidade Parcial na Teoria de Yang-Mills no $SU(2)$

Faddeev e Niemi [9] [10] propuseram uma reformulação da teoria de Yang-Mills no  $SU(2)$  em termos de novas variáveis a fim de tentar descrever a teoria no limite de baixas energias. Esta reformulação admite configurações do tipo nó como sólitons estáveis. Como consequência disto tem-se uma representação dual da teoria de Yang-Mills em que o limite de pequenas distâncias descreve pontos gluônicos não massivos

assintoticamente livres e a grandes distâncias aparecem sólitons massivos do tipo nó.

A ação original da teoria de Yang-Mills é dada por

$$S = \frac{1}{g^2} \int dx \operatorname{Tr} F^2 \quad (4.2.1)$$

Segundo a conjectura de Faddeev e Niemi, pode-se fazer a troca do campo  $A_\mu$  por um vetor  $n^a(x)$  ( $a = 1, 2, 3$ ) de comprimento unitário ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ ) e ação clássica dada por

$$S = \int dx m^2 (\partial_\mu \mathbf{n})^2 + \frac{1}{e^2} (\mathbf{n} \cdot \partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})^2 \quad (4.2.2)$$

esta ação pode ser relacionada com a ação de Skyrme para o SU(2), restrita à esfera  $S^2$ , contudo os aspectos topológicos destes dois modelos são bastante diferentes.

Desde que as derivadas com relação ao tempo na ação (4.2.2) sejam quadráticas, admite-se uma interpretação canônica com a Hamiltoniana estática

$$H = E_1 + E_2 = \int d^3x \left( m^2 (\partial_\mu \mathbf{n})^2 + \frac{1}{e^2} (\mathbf{n} \cdot \partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})^2 \right) \quad (4.2.3)$$

O primeiro termo  $E_1$  coincide com a ação não-linear do modelo sigma de  $O(3)$  que, como já se sabe, admite sólitons estáveis em duas dimensões. Ao se incluir o termo em derivada quártica  $E_2$ , sólitons estáveis de energia finita também se tornam possíveis em três dimensões. Para se chegar a esta conclusão, é necessário utilizar o argumento de escala de Derrick [7], que será descrito em seguida.

Fazendo com que

$$\vec{x} \rightarrow \rho \vec{x} \quad (4.2.4)$$

na Hamiltoniana descrita em (4.2.3), ficar-se-á com

$$H = E_1 + E_2 \rightarrow H = \rho E_1 + \frac{1}{\rho} E_2 \quad (4.2.5)$$

Fazendo a expansão em torno de  $\rho = 1$  ( $\rho - 1 \sim \varepsilon$ ), tem-se

$$E(\rho) = (E_1 + E_2) + (E_1 - E_2)\varepsilon + E_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (4.2.6)$$

de modo que existem sólitons de energia finita caso  $E_2$  esteja presente. Estas soluções obedecem o teorema do virial, de modo que

$$E_1 = E_2 \quad (4.2.7)$$

Um sóliton descrito por  $\mathbf{n}(x)$  é uma configuração localizada em  $R^3$ , no infinito espacial  $|x| \rightarrow \infty$  o campo vetorial  $\mathbf{n}(x)$  vai para o vetor constante  $\mathbf{n}_0$ . Pode-se

então compactificar  $R^3$  em uma esfera tridimensional  $S^3$  e  $\mathbf{n}(x)$  pode ser visto como o mapeamento da compactificação  $R^3 \sim S^3 \rightarrow S^2$ . Estes mapeamentos geram classes de homotopia não triviais  $\pi_3(S^2) \simeq Z$  que podem ser caracterizadas pelo invariante de Hopf. De modo a fazer esta caracterização, vai-se introduzir aqui a 2-forma fechada

$$F = (d\mathbf{n} \wedge d\mathbf{n}, \mathbf{n}) \quad (4.2.8)$$

em  $S^2$ . Desde que  $H_2(S^3) = 0$  tenha pré-imagem  $F_\star$  na base  $S^3$  exata

$$F_\star = dA_\star \quad (4.2.9)$$

e o invariante de Hopf (carga de Hopf)  $Q_H$  coincide com o termo tridimensional de Chern-Simons

$$Q_H = \frac{1}{4\pi^2} \int_{R^3} F \wedge A \quad (4.2.10)$$

A existência de sólitons estáveis em (4.2.3) com um invariante de Hopf não trivial é então sugerido pelo limite inferior [21]

$$H \geq c |Q_H|^{\frac{3}{4}} \quad (4.2.11)$$

onde  $c$  é uma constante numérica.

#### 4.2.1 Justificando a nova ação de Yang-Mills

É importante notar que a ação dada por (4.2.2) vem da ação (4.2.1) através de uma mudança de variável juntamente com um argumento de grupo de renormalização. Sendo assim, esta ação pode ser considerada a única ação que descreve o limite de baixas energias da teoria de Yang-Mills no  $SU(2)$ . O limite de altas energias é descrito pela ação (4.2.1). Não é possível renormalizar a ação (4.2.2) perturbativamente no limite ultravioleta mas, contudo, pode-se descrever a partir desta ação excitações físicas na teoria de Yang-Mills para o  $SU(2)$  a baixas energias.

Como foi visto, a ação clássica (4.2.2) descreve sólitons do tipo nó, o que sugere que a quantização desta ação deva ser feita levando-se em conta as propriedades quânticas destes sólitons. Do ponto de vista da teoria de Yang-Mills, é bastante interessante a presença de sólitons do tipo nó. Segundo Faddeev [9], é natural que se relacione estes sólitons a fluxos tubulares do tipo corda. Espera-se que estas estruturas estejam presentes no espectro infravermelho da teoria de Yang-Mills a fim de que se possa descrever a força de confinamento entre dois quarks. Na ausência de quarks os fluxos tubulares podem estar presentes como excitações de cor neutra,

neste caso eles colapsam neles mesmos em configurações solitônicas do tipo nó. Estas configurações são as candidatas naturais para descrever as glueballs.

Sendo assim, tem-se uma representação dual da teoria de Yang-Mills no  $SU(2)$  na qual o limite ultravioleta é descrito através de polarizações pontuais transversais não massivas de  $A_\mu$  e o limite infravermelho é descrito por fluxos tubulares solitônicos massivos que colapsam neles mesmos em configurações estáveis do tipo nó [10].

Gerard t'Hooft descreveu o confinamento como um efeito Meissner dual em um condensado de monopolos magnéticos [20]. Na teoria de Yang-Mills para o  $SU(2)$  o monopolo magnético relevante é a configuração singular de Wu-Yang

$$A_i^a = \epsilon_{aik} \frac{x_k}{r^2} \quad (4.2.12)$$

Para descrever um condensado destes monopolos, deve-se fazer uma extensão de (4.2.12) através da introdução de um campo uniforme para o correspondente fator de ordem. Para fazer a extensão de (4.2.12) é plausível que se escolha o Ansatz

$$A_i^a = \epsilon_{abc} \partial_i n^b n^c \equiv d\mathbf{n} \times \mathbf{n} \quad (4.2.13)$$

onde  $\mathbf{n}$  é um campo vetorial unitário de três componentes que descreve o condensado. Este ansatz, reproduz (4.2.12) quando se especifica a configuração singular, de “hedgehog”,  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r}$ .

O campo vetorial unitário  $\mathbf{n}$  descreve duas variáveis de campo independentes. A conexão quadridimensional de gauge fixo do  $SU(2)$   $A_\mu$  descreve seis graus de liberdade de polarização de modo que se deve estender a parametrização (4.2.13) para outras quatro polarizações adicionais. Para encontrar uma extensão natural, deve-se observar que a transformação infinitesimal

$$\delta A_\mu^a = \nabla_\mu^{ab} \varepsilon^b = \partial_\mu \varepsilon^a + \epsilon^{acb} A_\mu^c \varepsilon^b$$

que é parametrizada pelo elemento de álgebra de Lie  $\varepsilon^a(x) = \varepsilon(x) \cdot n^a(x)$ , não deixa a forma de (4.2.13) invariante.

Consegue-se que a transformação acima deixe (4.2.13) invariante, fazendo-se

$$\mathbf{A}_\mu = C_\mu \mathbf{n} + d\mathbf{n} \times \mathbf{n} \quad (4.2.14)$$

onde  $C_\mu$  é um campo vetorial que se transforma como uma conexão abeliana

$$C_\mu \rightarrow C_\mu + \partial_\mu \varepsilon \quad (4.2.15)$$

Sob esta transformação de gauge a forma funcional da configuração (4.2.14) é preservada.

No trabalho de t'Hooft [20] foi visto pela primeira vez que, no estudo do confinamento de quarks, era importante determinar a dominância abeliana. Cho [6] conseguiu verificar que a forma funcional (4.2.14) do SU(2) era um truncamento consistente para a conexão quadri-dimensional  $A_\mu^a$ .

A invariância de gauge abeliana de (4.2.15) implica que (4.2.14) descreve quatro componentes de campo, correspondentes às duas polarizações transversais da conexão  $C_\mu$  de U(1) e às duas componentes independentes de  $\mathbf{n}$ . De modo a fazer com que (4.2.14) descreva as seis componentes da conexão arbitrária  $\mathbf{A}_\mu$ , vai-se considerar uma transformação de gauge arbitrária finita de uma conexão  $\mathbf{A}_\mu$  qualquer. Seja

$$U(x) = \exp\left\{i\frac{\alpha\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}}{2}\right\} \quad (4.2.16)$$

o elemento do grupo SU(2) que determina esta transformação de gauge. Pode-se daí encontrar uma transformação de gauge da conexão arbitrária  $A_\mu^a$  como sendo

$$\mathbf{A}^U = [(\mathbf{A}, \mathbf{n}) + \mathbf{d}\alpha]\mathbf{n} + d\mathbf{n} \times \mathbf{n} + \sin \alpha (d\mathbf{n} + \mathbf{A} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad (4.2.17)$$

A forma funcional de  $\mathbf{A}_\mu$  deverá ser então

$$\mathbf{A}_\mu = C_\mu\mathbf{n} + d\mathbf{n} \times \mathbf{n} + \varphi\mathbf{B}_\mu + \mathbf{B}_\mu \times \mathbf{n} \quad (4.2.18)$$

onde  $\varphi$  é um campo escalar e  $B_\mu^a$  é um vetor ortogonal do SU(2), tal que  $\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_\mu = 0$  para todo  $\mu$ . Caso o número de componentes de campo independentes carregados por uma conexão quadridimensional do SU(2) seja seis, o campo ortogonal  $\mathbf{B}_\mu$  descreverá apenas uma componente. Pode-se escolher uma componente proporcional a  $d\mathbf{n}$  de modo que o Ansatz

$$\mathbf{A}_\mu = C_\mu + d\mathbf{n} \times \mathbf{n} + \rho d\mathbf{n} + \sigma d\mathbf{n} \times \mathbf{n} \quad (4.2.19)$$

parametriza uma conexão quadridimensional genérica. O segundo e o quarto termos de (4.2.19) foram separados apesar de serem linearmente dependentes. Esta separação foi realizada para que se pudesse combinar os escalares  $\rho$  e  $\sigma$  em um campo complexo

$$\phi = \rho + i\sigma \quad (4.2.20)$$

que possui a propriedade de deixar a forma funcional de (4.2.19) intacta sob uma transformação de gauge do SU(2) gerada por  $\alpha^a = \alpha\cdot\mathbf{n}$ , com o multipletto  $(C_\mu, \phi)$  se

transformando como um multipletto de campo no modelo abeliano de Higgs.

Para verificar se a parametrização (4.2.19) está completa, deve-se substituí-la na ação clássica de Yang-Mills e encontrar as equações de movimento obtidas pela variação das componentes de campo  $(\mathbf{n}, C_\mu, \phi)$ . Estas equações devem reproduzir as equações de Yang-Mills originais, obtidas através da variação da ação (4.2.2) com relação a  $\mathbf{A}_\mu$  e depois substituindo-se (4.2.19).

A derivada covariante de U(1) é dada por

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \partial_\mu \phi + iC_\mu \phi \\ &= \partial_\mu \rho - C_\mu \sigma + i(\partial_\mu \sigma + C_\mu \rho) \\ &= D_\mu \rho + iD_\mu \sigma \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

de modo que  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$  será dado por

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \mathbf{n}(G_{\mu\nu} - [1 - (\rho^2 + \sigma^2)]H_{\mu\nu}) + (D_\mu \rho \partial_\nu \mathbf{n} - D_\nu \rho \partial_\mu \mathbf{n}) + (D_\mu \sigma \partial_\nu \mathbf{n} \times \mathbf{n} - D_\nu \sigma \partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n}) \quad (4.2.22)$$

onde

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \partial_\nu C_\mu - \partial_\mu C_\nu \\ H_{\mu\nu} &= (\mathbf{n}, \partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Ao se substituir (4.2.22) em na ação de Yang-Mills (4.2.2), fica-se com

$$S = \frac{1}{g^2} \int dx \{ \mathbf{n}[F_{\mu\nu} - (1 - [\rho^2 + \sigma^2])H_{\mu\nu}] + (D_\mu \rho \partial_\nu \mathbf{n} - D_\nu \rho \partial_\mu \mathbf{n}) + (D_\mu \sigma \partial_\nu \mathbf{n} \times \mathbf{n} - D_\nu \sigma \partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n}) \}^2 \quad (4.2.24)$$

ao se fazer as variações em  $(C_\mu, \phi, \mathbf{n})$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla_\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\nu \mathbf{n} \cdot \nabla_\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\nu \mathbf{n} \times \mathbf{n} \mathbf{F}_{\mu\nu} &= 0 \\ D_\nu \rho \nabla_\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} + D_\nu \sigma \mathbf{n} \times \nabla_\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

As relações obtidas acima são proporcionais às equações de Yang-Mills originais, onde se fez a modificação de variáveis dada por (4.2.19). Devido à invariância de (4.2.15) com relação a U(1), somente seis dessas equações podem ser independentes. Tais equações coincidem com as equações de segunda ordem obtidas ao se variar a ação (4.2.2) com relação a  $A_\mu^a$  e posteriormente substituir a parametrização (4.2.19).

Na verdade, ao se fazer esta variação em (4.2.2), chega-se a vinte equações, contudo os três  $A_0^a$  são multiplicadores de Lagrange e outras três equações são de primeira ordem e correspondem à lei de Gauss no formalismo Hamiltoniano. Sendo assim, na teoria de Yang-Mills para o  $SU(2)$  há apenas seis equações de segunda ordem independentes. Pode-se então notar que a parametrização dada por (4.2.19) é, de fato, completa.

### 4.3 Um Submodelo para o Modelo de SF no $SU(2)$

Arathyn, Ferreira e Zimmerman [3] partiram da Lagrangeana do modelo de Skyrme-Faddeev

$$\mathcal{L} = m^2(\partial\mathbf{n})^2 - \eta_0 \frac{1}{e^2} H_{\mu\nu}^2 + \lambda(\mathbf{n}^2 - 1) \quad (4.3.26)$$

onde  $H_{\mu\nu}$  é definido por (4.2.23) e  $\eta_0 = \pm 1$  determina o sinal da métrica de Minkowski. As equações de movimento do modelo, escritas em termos de um campo complexo  $u$ , são dadas por

$$(1 + |u|^2)\partial^\mu L_\mu - 2u^*(L^\mu\partial_\mu u) = 0 \quad (4.3.27)$$

e seu complexo conjugado, onde  $L_\mu$  é dado por

$$L_\mu \equiv m^2\partial_\mu u - \frac{4}{e^2} \frac{K_\mu}{(1 + |u|^2)^2} \quad (4.3.28)$$

$K_\mu$  é definido como

$$K_\mu = (\partial^\nu u^* \partial_\nu u) \partial_\mu u - (\partial_\nu u)^2 \partial_\mu u^* \quad (4.3.29)$$

e o campo  $u$  é relacionado a  $\mathbf{n}$  através de

$$\mathbf{n} = \frac{1}{1 + |u|^2} (u + u^*, -i(u - u^*), |u|^2 - 1) \quad (4.3.30)$$

A energia, escrita em termos do campo complexo  $u$ , é dada por

$$E = E_1 + E_2 \quad (4.3.31)$$

onde

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv 4m^2 \int d^3x \frac{|\nabla u|^2}{(1 + |u|^2)^2} \\ E_2 &\equiv \frac{32}{e^2} \int d^3x \frac{(\nabla u_1)^2 (\nabla u_2)^2 (1 - \cos^2 \gamma)}{(1 + |u|^2)^4} \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

$\gamma$  é o ângulo entre os vetores  $\nabla u_1$  e  $\nabla u_2$ , de modo que  $E_1$  e  $E_2$  são positivos definidos.

Para estudar as propriedades de integrabilidade do modelo é importante notar que

$$\text{Im}(L^\mu \partial_\mu u^*) = 0 \quad (4.3.33)$$

de modo que o modelo admite uma representação de curvatura nula com potenciais dados por

$$\begin{aligned} A_\mu &= -\partial_\mu W W^{-1} \\ &= \frac{1}{(1+|u|^2)} (-i\partial_\mu u T_+ - i\partial_\mu u^* T_- + (u\partial_\mu u^* - u^*\partial_\mu u) T_3) \\ \tilde{B}_\mu^{(j)} &= \frac{1}{(1+|u|^2)} (L_\mu P_1^{(j)} - L_\mu^* P_{-1}^{(j)}) \end{aligned}$$

As correntes conservadas são dadas por

$$J_\mu^{(1)} = \sum_{m=-1}^1 J_\mu^{(1,m)} P_m^{(1)} \quad (4.3.34)$$

com

$$J_\mu^{(1,1)} = \frac{\mathcal{K}_\mu + \mathcal{K}_\mu^* u^2}{(1+|u|^2)^2} \quad J_\mu^{(1,0)} = \frac{i\sqrt{2}(\mathcal{K}_\mu^* u - \mathcal{K}_\mu u^*)}{(1+|u|^2)^2} \quad J_\mu^{(1,-1)} = -J_\mu^{(1,1)*} \quad (4.3.35)$$

Estas correntes correspondem às três correntes de Noether associadas à invariância do modelo sob a simetria  $O(3)$ . O modelo não admite um número infinito de correntes conservadas pois a condição

$$L_\mu \partial^\mu u = 0 \quad (4.3.36)$$

não é satisfeita visto que

$$L_\mu \partial^\mu u = m^2 (\partial u)^2 \quad (4.3.37)$$

De modo a se obter um número infinito de correntes conservadas, impõe-se o vínculo

$$(\partial u)^2 = 0 \quad (4.3.38)$$

As correntes deste submodelo integrável são dadas por

$$\begin{aligned} J_\mu^{(j_1 \dots j_n)} &= (W^{-1} \otimes \dots \otimes W^{-1}) \tilde{B}_\mu^{(j_1 \dots j_n)} (W \otimes \dots \otimes W) \\ &\equiv \sum_{l=1}^n \sum_{m_l = -j_l}^{j_l} J_\mu^{(j_1 \dots j_n), (m_1 \dots m_n)} P_{m_1}^{(j_1)} \otimes \dots \otimes P_{m_n}^{(j_n)} \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

Onde  $\tilde{B}_\mu^{(j_1 \dots j_n)}$  é agora dado em termos de  $L_\mu$ . As equações de movimento (4.3.27) se tornam agora

$$\partial^\mu (f(u) \partial_\mu u) = 0 \quad (4.3.40)$$



onde

$$f(u) \equiv m^2 - \eta_0 \frac{4}{e^2} \frac{\partial_\mu u \partial^\mu u^*}{(1 + |u|^2)^2} \quad (4.3.41)$$

Pode-se obter outros submodelos integráveis ao se impor diferentes vínculos mas, devido ao argumento de escala de Derrick, não haveriam sólitons estáveis em 3+1 dimensões. Por exemplo, impondo-se  $m^2 = 0$  só seria possível encontrar sólitons estáveis em 4+1 dimensões.

#### 4.4 Dualidade Parcial da Teoria de Yang-Mills no SU(N)

A decomposição da conexão quadridimensional  $A_\mu^a$  da teoria de Yang-Mills para o SU(2) [10] envolvia um vetor unitário de três componentes  $n^a$ , um campo de gauge abeliano  $C_\mu$  e um complexo-escalar  $\phi = \rho + i\sigma$ . Os campos  $C_\mu$  e  $\phi$  determinam um multipletto de U(1) sob transformações de gauge do SU(2) na direção de  $n^a$ , de modo que

$$A_\mu^a = C_\mu n^a + \epsilon_{abc} \partial_\mu n^b n^c + \rho \partial_\mu n^a + \sigma \epsilon^{abc} \partial_\mu n^b n^c \quad (4.4.42)$$

Uma generalização de (4.4.42) para o SU(N) foi proposta por Faddeev e Niemi [11], tem a seguinte forma

$$A_\mu^a = C_\mu^i m_i^a + f^{abc} \partial_\mu m_i^b m_i^c + \rho^{ij} f^{abc} \partial_\mu m_i^b m_j^c + \sigma^{ij} d^{abc} \partial_\mu m_i^b m_j^c \quad (4.4.43)$$

Com  $i = 1, \dots, N - 1$ , classifica-se a subálgebra de Cartan. Deve-se então construir  $N-1$  campos vetoriais mutuamente ortogonais  $m_i^a$ , onde  $a = 1, \dots, N^2 - 1 = \text{Dim}[\text{SU}(N)]$ , de modo que tais campos descrevem  $N(N-1)$  variáveis independentes. Caso sejam considerados apenas os dois primeiros termos do lado direito de (4.4.43), obter-se-á a conexão de Cho [6] para o SU(N). Os campos vetoriais  $C_\mu^i$ , de modo análogo ao que acontecia no SU(2), se transformam como conexões de U(1)

$$C_\mu^i \rightarrow C_\mu^i + \partial_\mu \alpha_i \quad (4.4.44)$$

onde os  $\alpha_i$  são elementos da álgebra de Lie que geram  $N - 1$  transformações de gauge independentes, do seguinte modo

$$\alpha_i = \alpha_i m_i^a T^a \quad (4.4.45)$$

Sendo assim, os campos  $C_\mu^i$  descrevem  $(D-2)(N^2-1)$  variáveis independentes. Os  $\phi_{ij} = \rho^{ij} + \sigma^{ij}$  são os  $N(N-1)$  complexo-escalares independentes, mapeados um no outro pelas transformações de gauge de U(1), dadas por (4.4.45). Os  $(C_\mu^i, \phi_{ij})$ , do mesmo modo que no SU(2), podem ser vistos como uma coleção de multipletos abelianos de Higgs. Os campos  $\rho^{ij}$  e  $\sigma^{ij}$  podem ser decompostos em um tensor

simétrico de traço nulo, um tensor antisimétrico, um vetor e nas representações de singleto do  $SO(N-1)$ . Em  $D$  dimensões, (4.4.43) descreve

$$N(N-1) + (D-2)(N-1) + N(N-1) = 2N^2 + (D-4)N + (2-D)$$

variáveis independentes. No caso de  $D=4$ , o número de variáveis independentes dado acima coincide com  $(D-2)(N^2-1)$ , que é o número de variáveis independentes transversas descrito pela conexão  $A_\mu^a$  de Yang-Mills no  $SU(N)$ .

A definição da álgebra de Lie do  $SU(N)$  consiste em  $N^2 - 1$  matrizes  $N \times N$  hermitianas de traço nulo  $T^a$ , com

$$T^a T^b = \frac{1}{2N} \delta^{ab} + \frac{i}{2} f^{abc} T^c + \frac{1}{2} d^{abc} T^c$$

normalizados a

$$(T^a, T^b) \equiv \text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$$

Os  $f^{abc}$  são constantes de estrutura reais totalmente antisimétricas e os  $d^{abc}$  são coeficientes totalmente simétricos

$$\frac{1}{2} d^{abc} = \text{Tr}(T^a \{T^b, T^c\}) \equiv \text{Tr}(T^a (T^b T^c + T^c T^b))$$

Na representação assim definida, é possível selecionar a subálgebra de Cartan, de modo que

$$\sum_{i,j=1}^{N-1} d^{ijk} d^{ijl} = \frac{2(N-2)}{N} \delta^{kl} \quad (4.4.46)$$

Para quaisquer matrizes  $A, B, C, D$  é valido que

$$\text{Tr}([A, B]\{C, D\} + [A, C]\{B, D\} + [A, D]\{B, C\}) = 0$$

e

$$\text{Tr}([A, B][C, D] + \{A, C\}\{B, D\} - \{A, D\}\{B, C\}) = 0$$

Vai-se introduzir agora as matrizes  $(\mathcal{F}^a)^{bc} = f^{abc}$ , que definem a representação adjunta e  $(\mathcal{D}^a)^{bc} = d^{abc}$ , fica-se então com

$$[\mathcal{F}^a, \mathcal{D}^b] = -f^{abc} \mathcal{D}^c \quad (4.4.47)$$

e

$$[\mathcal{D}^a, \mathcal{D}^b] = f^{abc} \mathcal{F}_{cd}^e + \frac{2}{N} (\delta^{ad} \delta^{bc} - \delta^{ac} \delta^{bd}) \quad (4.4.48)$$

onde as matrizes  $\mathcal{D}^a$  têm traço nulo.

Ao conjugar as matrizes de Cartan  $H_i$  da representação adjunta por um elemento  $g$  de  $SU(N)$ , consegue-se um conjunto de vetores da álgebra de Lie dados por

$$m_i = m_i^a T^a = g H_i g^{-1} \quad (4.4.49)$$

Por construção os  $m_i^a$  dependem de  $N(N-1)$  variáveis independentes e são ortonormais, ou seja

$$(m_i, m_j) = m_i^a m_j^a = \delta_{ij}$$

de modo que é possível verificar que

$$[m_i, m_j] = 0 \quad (4.4.50)$$

$$\{m_i, m_j\} = d^{ijk} m_k \quad (4.4.51)$$

$$\text{Tr}(m_i \partial_\mu m_j) = (m_i, \partial_\mu m_j) = 0 \quad (4.4.52)$$

Também é válido que o operador dado por

$$-f^{acd} m_i^c f^{deb} m_i^e = \delta^{ab} - m_i^a m_i^b \quad (4.4.53)$$

é um operador de projeção e esta relação também pode ser escrita utilizando-se o operador de permutação do  $SU(N)$ , como

$$-[m_i, T^d] \otimes [m_i, T^d] = T^b \otimes T^a - m_i \otimes m_i \quad (4.4.54)$$

Considerando a 1-forma de Maurer-Cartan dada por

$$dgg^{-1} = \omega_{a\mu} T^a dx^\mu \quad (4.4.55)$$

encontra-se que

$$dm_i = [\omega, m_i] \quad (4.4.56)$$

Cada matriz de Cartan  $H_i$  pode ser usada para construir uma 2-forma simplética de Kirilov na órbita de  $\frac{SU(N)}{U(1)^{N-1}}$ ,

$$\Omega^i = \text{Tr}(H_i [g^{-1} dg, g^{-1} dg]) \quad (4.4.57)$$

$$d\Omega^i = 0$$

Os  $\Omega^i$  estão relacionados com as representações de  $SU(N)$ . De acordo com o teorema de Borel-Weil, cada combinação linear de  $\Omega^i$  com coeficientes inteiros corresponde a uma representação irredutível de  $SU(N)$ .

É possível escrever as 2-formas  $\Omega^i$  em termos de  $m_i$ . Para tanto basta que se combine (4.4.53) com a relação (4.4.56) e a identidade de Jacobi.

$$\Omega^i = \text{Tr}(m_i [dm_k, dm_k]) \quad (4.4.58)$$

ou em componentes

$$\Omega_{i,\mu\nu} = f^{abc} m_i^a \partial_\mu m_k^b \partial_\nu m_k^c \quad (4.4.59)$$

A conexão invariante do SU(N) - $A_\mu^a$ - pode ser decomposta em

$$A = C.m + (1 + \rho)[dm, m] + \sigma dm, m \quad (4.4.60)$$

Em quatro dimensões tal decomposição contém o número correto de variáveis para uma conexão geral do SU(N). A dois forma  $F = dA + AA$  éobtida por substituição direta. A estrutura de  $F$  em termos de  $m_i$  é dada por

$$F_{\mu\nu}^a = m_i^a (\partial_\mu C_\nu^i - \partial_\nu C_\mu^i - m_i^a \Omega_{\mu\nu}^i + \dots) \quad (4.4.61)$$

Os termos que não foram colocados explicitamente dependem de  $\phi_{ij}$  e/ou estão na direção de  $\frac{\text{SU}(N)}{\text{U}(1)^{N-1}}$ . Caso se calcule a 2-forma de curvatura da conexão de Cho para o SU(N) os termos restantes poderão ser encontrados. Para uma conexão plana tem-se que

$$dC^i = \Omega^i \quad (4.4.62)$$

A generalização da ação (4.2.2), proposta por Faddeev e Niemi [11] para o SU(N) proposta por Faddeev e Niemi é então dada por

$$S = \int d^4x \left[ \frac{M_i^2}{2} (\partial_\mu m_i)^2 + \frac{1}{e_i^2} ([\partial_\mu m_i, \partial_\nu m_i])^2 \right] \quad (4.4.63)$$

## Capítulo 5

### O Modelo de Skyrme-Faddeev para o SU(N)

#### 5.1 A Condição de Curvatura Nula para o Modelo de SF no SU(N)

Partindo da ação do modelo de SF para o SU(N) dada por

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} S_i \quad (5.1.1)$$

onde

$$S_i = \int d^4x \left[ \frac{M_i^2}{2} (\partial_\mu m_i)^2 + \frac{1}{e_i^2} ([\partial_\mu m_i, \partial_\nu m_i])^2 \right] \quad (5.1.2)$$

Vai-se calcular as equações de movimento da teoria. Para tanto, será necessário se utilizar a relação

$$\delta m_i = [\delta g g^{-1}, g H_i g^{-1}] \quad (5.1.3)$$

De modo que ao se fazer a variação da ação fica-se com

$$\delta S_i = - \int d^4x \text{Tr} ( \partial^\mu J_\mu^i \delta m_i ) \quad (5.1.4)$$

onde se utilizou a integração por partes e se definiu

$$J_\mu^i = M_i^2 \partial_\mu m_i + \frac{4}{e_i^2} [ \partial^\nu m_i, [\partial_\mu m_i, \partial_\nu m_i] ] \quad (5.1.5)$$

É importante notar que  $\delta m_i$  possui componentes em todas as direções da álgebra de modo que as equações de movimento não são  $\sum_i \partial^\mu J_\mu^i = 0$ . O número de campos da teoria é igual à dimensão de  $SU(N)/U(1)^{N-1}$  e  $J_\mu^i$  tem componentes com a dimensão de SU(N).

Usando (5.1.3), a equação (5.1.4) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta S_i &= - \int d^4x \text{Tr} ( \partial^\mu J_\mu^i [ \delta g g^{-1}, g H_i g^{-1} ] ) \\ &= \int d^4x \text{Tr} ( [ g^{-1} \partial^\mu J_\mu^i, H_i ] \delta g g^{-1} ) \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

O número de componentes de  $[g^{-1}\partial^\mu J_\mu^i, H_i]$  é igual à dimensão de  $SU(N)/U(1)^{N-1}$  de modo que as equações de movimento são

$$\sum_{i=1}^{N-1} [g^{-1}\partial^\mu J_\mu^i, H_i] = 0 \quad (5.1.7)$$

Introduzindo agora

$$J_\mu^i = g C_\mu^i g^{-1} \quad (5.1.8)$$

é possível se obter de (5.1.5) e de (5.1.3) a relação

$$\begin{aligned} C_\mu^i &= g^{-1} J_\mu^i g \\ &= M_i^2 [g^{-1} \partial_\mu g, H_i] + \frac{4}{e_i^2} [[g^{-1} \partial^\nu g, H_i], [[g^{-1} \partial_\mu g, H_i], g^{-1} \partial_\nu g, H_i]] \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

De modo que agora chega-se, a partir de (5.1.8), em

$$\partial^\mu J_\mu^i = g D^\mu C_\mu^i g^{-1} \quad (5.1.10)$$

Onde a derivada covariante  $D^\mu$  é dada por

$$D^\mu = \partial^\mu + [A^\mu, ] \quad (5.1.11)$$

com

$$A_\mu = g^{-1} \partial_\mu g \quad (5.1.12)$$

De modo que as equações de movimento do modelo se tornam

$$\sum_{i=1}^{N-1} [D^\mu C_\mu^i, H_i] = 0 \quad (5.1.13)$$

De modo a simplificar a notação vai-se introduzir

$$h_\mu^i \equiv [g^{-1} \partial_\mu g, H_i] = [A_\mu, H_i] \quad (5.1.14)$$

deste modo

$$C_\mu^i = M_i^2 h_\mu^i + \frac{4}{e_i^2} [h_i^\nu, [h_\mu^i, h_\nu^i]] \quad (5.1.15)$$

daí(5.1.13) fica

$$[D^\mu C_\mu^i, H_i] = \partial^\mu [C_\mu^i, H_i] + [A^\mu, [C_\mu^i, H_i]] + [h_i^\mu, C_\mu^i] \quad (5.1.16)$$

como

$$[h_i^\mu, C_\mu^i] = 0 \quad (5.1.17)$$

pois

$$\begin{aligned}
[h_i^\mu, C_\mu^i] &= M_i^2 [h_i^\mu, h_\mu^i] + \frac{4}{e_i^2} [h_i^\mu, [h_i^\nu, [h_\mu^i, h_\nu^i]]] \\
&= -\frac{4}{e_i^2} [[h_\mu^i, h_\nu^i], [h_i^\mu, h_i^\nu]] - \frac{4}{e_i^2} [h_i^\nu, [[h_\mu^i, h_\nu^i], h_i^\mu]]
\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

e

$$\begin{aligned}
[h_i^\mu, [h_i^\nu, [h_\mu^i, h_\nu^i]]] &= [h_i^\nu, [h_i^\mu, [h_\mu^i, h_\nu^i]]] \\
&= -[h_i^\mu, [h_i^\nu, [h_\mu^i, h_\nu^i]]] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.1.19}$$

pode-se então escrever as equações de movimento na forma

$$\sum_{i=1}^{N-1} D^\mu B_\mu^i = 0 \tag{5.1.20}$$

com o potencial  $B_\mu^i$  definido como

$$B_\mu^i \equiv [C_\mu^i, H_i] \tag{5.1.21}$$

O número de correntes conservadas do modelo é igual à dimensão da representação do grupo, de modo que para conseguir um número infinito de correntes conservadas deve-se tentar escrever as equações de movimento em uma representação infinita.

Pode-se perceber ainda que o potencial  $A_\mu$  apresenta a seguinte propriedade

$$A_\mu^\dagger = (g^{-1} \partial_\mu g)^\dagger = \partial_\mu g^\dagger g = g^{-1} \partial_\mu g = -A_\mu \tag{5.1.22}$$

onde se utilizou o fato de que  $g$  é unitário ( $g^\dagger = g^{-1}$ )

No caso do potencial  $B_\mu$ , tem-se que

$$B_\mu^{i\dagger} = -B_\mu^i \tag{5.1.23}$$

pois

$$B_\mu^{i\dagger} = [C_\mu^i, H_i]^\dagger \tag{5.1.24}$$

onde

$$H_i^\dagger = H_i \quad E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha} \tag{5.1.25}$$

então

$$h_\mu^{i\dagger} = h_\mu^i \tag{5.1.26}$$

daí

$$C_\mu^{i\dagger} = M_i^2 h_\mu^i + \frac{4}{e_i^2} [h_i^\nu, [h_\mu^i, h_\nu^i]] = C_\mu^i \tag{5.1.27}$$

como conseqüência do fato de  $B_\mu^{i\dagger} = -B_\mu^i$ , tem-se agora que

$$(B_\mu^{i,-\alpha})^\dagger = -B_\mu^{i,\alpha} \quad (5.1.28)$$

sendo assim,

$$B_\mu^i = \sum_{\alpha>0} (B_\mu^{i,\alpha} E_\alpha - B_\mu^{i,\alpha\dagger} E_{-\alpha}) \quad (5.1.29)$$

## 5.2 O Modelo de SF para o SU(3)

Será colocado agora um estudo do modelo de SF no SU(3) que posteriormente será generalizado para o SU(N).

Inicialmente foi realizada uma parametrização do SU(3) em termos do campo  $u$ , para tanto colocou-se que um elemento  $g$  de SU(3) poderia ser parametrizado de acordo com

$$g = D_{12}(\phi_1, \theta_1) D_{13}(\phi_2, \theta_2) D_{23}(\phi_3, \theta_3) D_4(\psi_1, \psi_2) \quad (5.2.30)$$

com  $0 \leq \theta_i < \pi$  ,  $0 \leq \phi_i < 2\pi$  ,  $0 \leq \psi_i < 4\pi$

e

$$\begin{aligned} D_{12} &= \begin{pmatrix} e^{i\phi_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_1}{2} & -i \sin \frac{\theta_1}{2} & 0 \\ -i \sin \frac{\theta_1}{2} & \cos \frac{\theta_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D_{13} &= \begin{pmatrix} e^{i\phi_2/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_2/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_2}{2} & 0 & -i \sin \frac{\theta_2}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -i \sin \frac{\theta_2}{2} & 0 & \cos \frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix} \\ D_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_3/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_3/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\theta_3}{2} & -i \sin \frac{\theta_3}{2} \\ 0 & -i \sin \frac{\theta_3}{2} & \cos \frac{\theta_3}{2} \end{pmatrix} \\ D_4 &= \begin{pmatrix} e^{i\psi_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\psi_1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\psi_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\psi_2/2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.31)$$



Definiu-se o campo  $u$  como

$$u_1 = -\tan \frac{\theta_1}{2} e^{i\phi_1} \quad u_2 = -\sin \frac{\theta_3}{2} e^{\frac{i}{2}(-\phi_1 + \phi_2 + 2\phi_3)} \quad u_3 = -\tan \frac{\theta_2}{2} e^{\frac{i}{2}(\phi_1 + 2\phi_2)} \quad (5.2.32)$$

de modo que

$$\cos \frac{\theta_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+|u_1|^2}} \quad \cos \frac{\theta_3}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+|u_2|^2}} \quad \cos \frac{\theta_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+|u_3|^2}} \quad (5.2.33)$$

Assim foi possível chegar à parametrização do  $SU(3)$  dada por

$$g = U_1 U_3 U_2 e^{\frac{i}{2}((\phi_1 + \phi_2 + \psi_1)H_1 + (\phi_2 + \phi_3 + \psi_2)H_2)} \quad (5.2.34)$$

Onde os  $H_i$  são os geradores de Cartan do  $SU(3)$  e os  $U_i$  são dados por

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{1+|u_1|^2}} \begin{pmatrix} 1 & iu_1 & 0 \\ iu_1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+|u_1|^2} \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{1+|u_2|^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+|u_2|^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & iu_2 \\ 0 & iu_2^* & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2.35)$$

$$U_3 = \frac{1}{\sqrt{1+|u_3|^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & iu_3 \\ 0 & \sqrt{1+|u_3|^2} & 0 \\ iu_3^* & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2.36)$$

Pode-se separar o potencial  $A_\mu$  em termos que estão na direção dos  $H_i$  e em termos que estão na direção dos operadores de step  $E_{\alpha_i}$  do seguinte modo

$$A_\mu \equiv A_\mu^H + A_\mu^E \quad (5.2.37)$$

Onde  $A_\mu^H$  e  $A_\mu^E$  são escritos em termos do campo  $u$  como

$$A^{H_1} = \frac{(2+|u_2|^2+|u_3|^2-|u_2|^2|u_3|^2)(-(u_1^* \partial_\mu u_1) + u_1 \partial_\mu u_1^*)}{4(1+|u_1|^2)(1+|u_2|^2)(1+|u_3|^2)}$$

$$+ \frac{\frac{i}{2}(u_2 u_3^* \partial_\mu u_1 + u_2^* u_3 \partial_\mu u_1^*)}{(1+|u_1|^2)(1+|u_2|^2)\sqrt{1+|u_3|^2}} - \frac{-(u_2^* \partial_\mu u_2) + u_2 \partial_\mu u_2^*}{4(1+|u_2|^2)}$$

$$+ \frac{(1+2|u_2|^2)(-(u_3^* \partial_\mu u_3) + u_3 \partial_\mu u_3^*)}{4(1+|u_2|^2)(1+|u_3|^2)}$$

$$\begin{aligned}
A^{H_2} &= \frac{(|u_2|^2 - |u_3|^2 + |u_2|^2 |u_3|^2) (- (u_1^* \partial_\mu u_1) + u_1 \partial_\mu u_1^*)}{4 (1 + |u_1|^2) (1 + |u_2|^2) (1 + |u_3|^2)} \\
&- \frac{\frac{i}{2} (u_2 u_3^* \partial_\mu u_1 + u_2^* u_3 \partial_\mu u_1^*)}{(1 + |u_1|^2) (1 + |u_2|^2) \sqrt{1 + |u_3|^2}} + \frac{- (u_2^* \partial_\mu u_2) + u_2 \partial_\mu u_2^*}{4 (1 + |u_2|^2)} \\
&+ \frac{- (u_3^* \partial_\mu u_3) + u_3 \partial_\mu u_3^*}{4 (1 + |u_2|^2) (1 + |u_3|^2)} \\
A^{E_{\alpha_1}} &= \frac{i \partial_\mu u_1}{(1 + |u_1|^2) \sqrt{1 + |u_2|^2} \sqrt{1 + |u_3|^2}} \\
&- \frac{u_2^* u_3 (- (u_1^* \partial_\mu u_1) + u_1 \partial_\mu u_1^*)}{2 (1 + |u_1|^2) \sqrt{1 + |u_2|^2} (1 + |u_3|^2)} - \frac{u_2^* \partial_\mu u_3}{\sqrt{1 + |u_2|^2} (1 + |u_3|^2)} \\
A^{E_{-\alpha_1}} &= \frac{i \partial_\mu u_1^*}{(1 + |u_1|^2) \sqrt{1 + |u_2|^2} \sqrt{1 + |u_3|^2}} \\
&- \frac{u_2 u_3^* (- (u_1^* \partial_\mu u_1) + u_1 \partial_\mu u_1^*)}{2 (1 + |u_1|^2) \sqrt{1 + |u_2|^2} (1 + |u_3|^2)} + \frac{u_2 \partial_\mu u_3^*}{\sqrt{1 + |u_2|^2} (1 + |u_3|^2)} \\
A^{E_{\alpha_2}} &= \frac{u_2^2 u_3^* \partial_\mu u_1}{(1 + |u_1|^2) (1 + |u_2|^2) \sqrt{1 + |u_3|^2}} - \frac{u_3 \partial_\mu u_1^*}{(1 + |u_1|^2) (1 + |u_2|^2) \sqrt{1 + |u_3|^2}} \\
&- \frac{\frac{i}{2} u_2 (1 + 2 |u_3|^2) (- (u_1^* \partial_\mu u_1) + u_1 \partial_\mu u_1^*)}{(1 + |u_1|^2) (1 + |u_2|^2) (1 + |u_3|^2)} \\
&+ \frac{i \partial_\mu u_2}{1 + |u_2|^2} + \frac{\frac{i}{2} u_2 (- (u_3^* \partial_\mu u_3) + u_3 \partial_\mu u_3^*)}{(1 + |u_2|^2) (1 + |u_3|^2)} \\
A^{E_{-\alpha_2}} &= \frac{u_3^* \partial_\mu u_1}{(1 + |u_1|^2) (1 + |u_2|^2) \sqrt{1 + |u_3|^2}} - \frac{u_2^{*2} u_3 \partial_\mu u_1^*}{(1 + |u_1|^2) (1 + |u_2|^2) \sqrt{1 + |u_3|^2}} \\
&+ \frac{\frac{i}{2} u_2^* (1 + 2 |u_3|^2) (- (u_1^* \partial_\mu u_1) + u_1 \partial_\mu u_1^*)}{(1 + |u_1|^2) (1 + |u_2|^2) (1 + |u_3|^2)} + \frac{i \partial_\mu u_2^*}{1 + |u_2|^2} \\
&- \frac{\frac{i}{2} u_2^* (- (u_3^* \partial_\mu u_3) + u_3 \partial_\mu u_3^*)}{(1 + |u_2|^2) (1 + |u_3|^2)} \\
A^{E_{\alpha_3}} &= - \left( \frac{u_2 \partial_\mu u_1}{(1 + |u_1|^2) \sqrt{1 + |u_2|^2} \sqrt{1 + |u_3|^2}} \right) \\
&+ \frac{\frac{i}{2} u_3 (- (u_1^* \partial_\mu u_1) + u_1 \partial_\mu u_1^*)}{(1 + |u_1|^2) \sqrt{1 + |u_2|^2} (1 + |u_3|^2)} + \frac{i \partial_\mu u_3}{\sqrt{1 + |u_2|^2} (1 + |u_3|^2)} \\
A^{E_{-\alpha_3}} &= \frac{u_2^* \partial_\mu u_1^*}{(1 + |u_1|^2) \sqrt{1 + |u_2|^2} \sqrt{1 + |u_3|^2}} \\
&- \frac{\frac{i}{2} u_3^* (- (u_1^* \partial_\mu u_1) + u_1 \partial_\mu u_1^*)}{(1 + |u_1|^2) \sqrt{1 + |u_2|^2} (1 + |u_3|^2)} + \frac{i \partial_\mu u_3^*}{\sqrt{1 + |u_2|^2} (1 + |u_3|^2)} \tag{5.2.38}
\end{aligned}$$

O potencial  $B_\mu$  também pode ser escrito em termos do potencial  $A_\mu$  e dos geradores do  $SU(3)$ , como

$$B_\mu = B_\mu^H + B_\mu^E \quad (5.2.39)$$

com  $B_\mu^H = 0$ . Os  $B_\mu^E$  por sua vez são dados por

$$\begin{aligned} B_\mu^{\alpha_1} &= A_\mu^{\alpha_1} (2m_1^2 + g_1 (A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_3 \nu} + A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_2 \nu} + 8A_\nu^{-\alpha_1} A^{\alpha_1 \nu})) \\ &+ g_1 (A_\mu^{\alpha_3} A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_1 \nu} - 2A_\mu^{\alpha_2} A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_1 \nu} - 8A_\mu^{-\alpha_1} A_\nu^{\alpha_1} A^{\alpha_1 \nu} \\ &+ A_\mu^{-\alpha_2} A_\nu^{\alpha_1} A^{\alpha_2 \nu} - 2A_\mu^{-\alpha_3} A_\nu^{\alpha_1} A^{\alpha_3 \nu}) \\ B_\mu^{-\alpha_1} &= A_\mu^{-\alpha_1} (2m_1^2 + g_1 (A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_3 \nu} + A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_2 \nu} + 8A_\nu^{-\alpha_1} A^{\alpha_1 \nu})) \\ &+ g_1 (-2A_\mu^{\alpha_3} A_\nu^{-\alpha_3} A^{-\alpha_1 \nu} + A_\mu^{\alpha_2} A_\nu^{-\alpha_2} A^{-\alpha_1 \nu} - 8A_\mu^{\alpha_1} A_\nu^{-\alpha_1} A^{\alpha_1 \nu} \\ &- 2A_\mu^{-\alpha_2} A_\nu^{-\alpha_1} A^{\alpha_2 \nu} + A_\mu^{-\alpha_3} A_\nu^{-\alpha_1} A^{\alpha_3 \nu}) \\ B_\mu^{\alpha_2} &= \frac{1}{4} (A_\mu^{\alpha_3} (g_1 + 9g_2) A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_2 \nu} + A_\mu^{\alpha_2} (2m_1^2 + 6m_2^2 + g_1 A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_3 \nu} \\ &+ 9g_2 A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_3 \nu} + 2g_1 A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_2 \nu} + 18g_2 A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_2 \nu} + 4g_1 A_\nu^{-\alpha_1} A^{\alpha_1 \nu}) \\ &- 2(4(A_\mu^{\alpha_1} g_1 A_\nu^{-\alpha_1} A^{\alpha_2 \nu} - 2A_\mu^{-\alpha_1} A_\nu^{-\alpha_1} A^{\alpha_2 \nu} \\ &+ (g_1 + 9g_2) (A_\mu^{-\alpha_2} A_\nu^{\alpha_2} A^{\alpha_2 \nu} + A_\mu^{-\alpha_3} A_\nu^{\alpha_2} A^{\alpha_3 \nu}))) \\ B_\mu^{-\alpha_2} &= \frac{1}{4} (-2A_\mu^{\alpha_3} (g_1 + 9g_2) A_\nu^{-\alpha_3} A^{-\alpha_2 \nu} - 2A_\mu^{\alpha_2} g_1 A_\nu^{-\alpha_2} A^{-\alpha_2 \nu} - 18A_\mu^{\alpha_2} g_2 A_\nu^{-\alpha_2} A^{-\alpha_2 \nu} \\ &+ 4A_\mu^{\alpha_1} g_1 A_\nu^{-\alpha_2} A^{-\alpha_1 \nu} - 8A_\mu^{-\alpha_1} g_1 A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_1 \nu} + A_\mu^{-\alpha_3} g_1 A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_3 \nu} \\ &+ 9A_\mu^{-\alpha_3} g_2 A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_3 \nu} + A_\mu^{\alpha_2} (2m_1^2 + 6m_2^2 + g_1 A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_3 \nu} \\ &+ 9g_2 A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_3 \nu} + 2g_1 A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_2 \nu} + 18g_2 A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_2 \nu} + 4g_1 A_\nu^{-\alpha_1} A^{\alpha_1 \nu})) \\ B_\mu^{\alpha_3} &= \frac{1}{4} (A_\mu^{\alpha_2} (g_1 + 9g_2) A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_3 \nu} + A_\mu^{\alpha_3} (2m_1^2 + 6m_2^2 + 2g_1 A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_3 \nu} \\ &+ 18g_2 A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_3 \nu} + g_1 A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_2 \nu} + 9g_2 A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_2 \nu} + 4g_1 A_\nu^{-\alpha_1} A^{\alpha_1 \nu}) \\ &- 2(-2(A_\mu^{\alpha_1} g_1 A_\nu^{-\alpha_1} A^{\alpha_3 \nu} + 4A_\mu^{-\alpha_1} A_\nu^{\alpha_1} A^{\alpha_3 \nu} \\ &+ (g_1 + 9g_2) (A_\mu^{-\alpha_2} A_\nu^{\alpha_2} A^{\alpha_3 \nu} + A_\mu^{-\alpha_3} A_\nu^{\alpha_2} A^{\alpha_3 \nu}))) \\ B_\mu^{-\alpha_3} &= \frac{1}{4} (-2A_\mu^{\alpha_3} (g_1 + 9g_2) A_\nu^{-\alpha_3} A^{-\alpha_3 \nu} - 2A_\mu^{\alpha_2} g_1 A_\nu^{-\alpha_3} A^{-\alpha_2 \nu} - 18A_\mu^{\alpha_2} g_2 A_\nu^{-\alpha_3} A^{-\alpha_2 \nu} \\ &- 8A_\mu^{\alpha_1} g_1 A_\nu^{-\alpha_3} A^{-\alpha_1 \nu} + 4A_\mu^{-\alpha_1} g_1 A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_1 \nu} + A_\mu^{-\alpha_2} g_1 A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_2 \nu} \\ &+ 9A_\mu^{-\alpha_2} g_2 A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_2 \nu} + A_\mu^{-\alpha_3} (2m_1^2 + 6m_2^2 + 2g_1 A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_3 \nu} \\ &+ 18g_2 A_\nu^{-\alpha_3} A^{\alpha_3 \nu} + g_1 A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_2 \nu} + 9g_2 A_\nu^{-\alpha_2} A^{\alpha_2 \nu} + 4g_1 A_\nu^{-\alpha_1} A^{\alpha_1 \nu})) \end{aligned} \quad (5.2.40)$$

onde  $g_i$  é dado por

$$g_i = \frac{4}{e_i^2} \quad (5.2.41)$$

Segundo (3.1.35) as correntes conservadas são dadas por

$$J^\mu = W^{-1} B^\mu W \quad (5.2.42)$$

onde  $W = U_1 U_3 U_2$ . Tem-se então, oito correntes conservadas, visto que o número de dimensões da representação adjunta do  $SU(3)$  é oito.

## 5.3 A Curvatura Nula em uma Representação Qualquer

### 5.3.1 A Construção de Schwinger

Ao estudar as relações de comutação de momentos angulares arbitrários, Schwinger [18] percebeu que tais relações poderiam ser reduzidas às relações de comutação do oscilador harmônico.

Considerando a álgebra dos osciladores harmônicos, tem-se que as relações de comutação para os operadores de criação e destruição são dadas por

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (5.3.43)$$

e supondo que haja uma representação matricial  $T$  de uma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ , define-se então

$$J(T) \equiv a_i^\dagger T_{ij} a_j \quad (5.3.44)$$

Daí o comutador de  $J(T)$  e  $J(T')$ , será dado por

$$[J(T), J(T')] = a_i^\dagger T_{ij} a_j a_k^\dagger T'_{kl} a_l - a_i^\dagger T'_{ij} a_j a_k^\dagger T_{kl} a_l \quad (5.3.45)$$

Como

$$a_j a_k^\dagger = [a_j, a_k^\dagger] + a_k^\dagger a_j = a_k^\dagger a_j + \delta_{kj}$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} [J(T), J(T')] &= a_i^\dagger T_{ij} (a_k^\dagger a_j + \delta_{kl}) T'_{kl} a_l - a_i^\dagger T'_{ij} (a_k^\dagger a_j + \delta_{kl}) T_{kl} a_l \\ &= a_i^\dagger (T_{ij} T'_{jl} - T'_{ij} T_{jl}) a_l + a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l (T_{ij} T'_{kl} - T'_{ij} T_{kl}) \\ &= a_i^\dagger (T_{ij} T'_{jl} - T'_{ij} T_{jl}) a_l \end{aligned}$$

ou seja,

$$[J(T), J(T')] = J([T, T']) \quad (5.3.46)$$

De modo que partindo de dada uma representação matricial é possível escrever uma representação em termos de operadores, como os operadores de criação e destruição. O. Babelon e L.A. Ferreira [4] propuseram que os operadores escritos na forma

$$a_j^\dagger \equiv \zeta_j \quad a_i = \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \quad (5.3.47)$$

desde que

$$[a_i, a_j^\dagger] = \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta_i}, \zeta_j \right] = \delta_{ij} \quad (5.3.48)$$

poderiam ser utilizados como parâmetro espectral.

### A Construção de Schwinger para o SU(3)

A representação triplete do SU(3) é dada por [14]

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & H_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.3.49)$$

com

$$E_{-\alpha} = E_{\alpha}^{\dagger} \quad (5.3.50)$$

De modo que utilizando-se (5.3.44),(5.3.47) e (5.3.1), os operadores  $J(T)$  serão agora dados por

$$\begin{aligned} J(H_1) &= \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} - \zeta_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} & J(H_2) &= \zeta_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} - \zeta_3 \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \\ J(E_1) &= \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} & J(E_{-1}) &= \zeta_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ J(E_2) &= \zeta_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_3} & J(E_{-2}) &= \zeta_3 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \\ J(E_3) &= \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_3} & J(E_{-3}) &= \zeta_3 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \end{aligned}$$

A representação anti-triplete é

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & H_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.3.51)$$

com

$$E_{-\alpha} = E_{\alpha}^{\dagger} \quad (5.3.52)$$

Assim, para a representação anti-triplete os operadores  $J(T)$  -utilizando-se (5.3.44),(5.3.47) e (5.3.1)- serão dados por

$$\begin{aligned} \bar{J}(H_1) &= \bar{\zeta}_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} - \bar{\zeta}_3 \frac{\partial}{\partial \zeta_3} & \bar{J}(H_2) &= \bar{\zeta}_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} - \bar{\zeta}_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \\ \bar{J}(E_1) &= \bar{\zeta}_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_3} & \bar{J}(E_{-1}) &= \bar{\zeta}_3 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \\ \bar{J}(E_2) &= \bar{\zeta}_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} & \bar{J}(E_{-2}) &= \bar{\zeta}_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ \bar{J}(E_3) &= -\bar{\zeta}_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_3} & \bar{J}(E_{-3}) &= -\bar{\zeta}_3 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \end{aligned}$$

É importante notar que  $J(T)$  e  $\bar{J}(T)$  comutam e que  $J(T) + \bar{J}(T)$  também forma uma representação .

$$[J(T) + \bar{J}(T), J(T') + \bar{J}(T')] =$$

$$\begin{aligned}
&= [J(T), J(T')] + [\bar{J}(T), \bar{J}(T')] \\
&= J([T, T']) + \bar{J}([T, T'])
\end{aligned} \tag{5.3.53}$$

### 5.3.2 Construindo uma Representação Genérica

Para que se obtenha um número infinito de correntes conservadas locais é essencial que se escreva a condição de curvatura nula em uma representação infinita que contenha todos os pesos da representação adjunta.

As raízes do  $SU(3)$  escritas na representação adjunta são dadas por

$$\begin{aligned}
|\alpha_1\rangle &= \zeta_1 \bar{\zeta}_2 & |-\alpha_1\rangle &= \zeta_2 \bar{\zeta}_3 & |\alpha_2\rangle &= \zeta_2 \bar{\zeta}_1 \\
|-\alpha_2\rangle &= \zeta_3 \bar{\zeta}_2 & |\alpha_3\rangle &= \zeta_1 \bar{\zeta}_1 & |-\alpha_3\rangle &= \zeta_3 \bar{\zeta}_3
\end{aligned} \tag{5.3.54}$$

Pode-se então reescrever o potencial  $B_\mu$ , em uma representação genérica

$$\begin{aligned}
B_\mu &= f_1 \zeta_1 \bar{\zeta}_2 B_\mu^{\alpha_1} + f_{-1} \zeta_2 \bar{\zeta}_3 B_\mu^{-\alpha_1} + f_2 \zeta_2 \bar{\zeta}_1 B_\mu^{\alpha_2} \\
&+ f_{-2} \zeta_3 \bar{\zeta}_2 B_\mu^{-\alpha_2} + f_3 \zeta_1 \bar{\zeta}_1 B_\mu^{\alpha_3} + f_{-3} \zeta_3 \bar{\zeta}_3 B_\mu^{-\alpha_3}
\end{aligned} \tag{5.3.55}$$

Sendo que os  $f_\alpha$  são funções de monômios dos  $\zeta_i$ 's que possuem peso nulo na direção dos  $H_i$ 's, ou seja, os  $f_\alpha$  são funções de invariantes.

Os invariantes do  $SU(3)$  na representação adjunta são dados por

$$z_1 = \frac{\zeta_1 \bar{\zeta}_3}{\zeta_2 \bar{\zeta}_2} \quad z_2 = \frac{\zeta_2 \bar{\zeta}_2}{\zeta_3 \bar{\zeta}_1} \quad z_3 = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \quad z_4 = \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 \bar{\zeta}_3 \tag{5.3.56}$$

Sendo  $J(T) + \bar{J}(T)$  atuam em uma função qualquer dos invariantes  $z_i$  de acordo com

$$\begin{aligned}
H_1 f &= 0 & H_2 f &= 0 \\
E_{\alpha_1} f &= \frac{\bar{\zeta}_2}{\zeta_3} [(z_1 - z_1^2) \partial_{z_1} + z_1 z_2 \partial_{z_2} + z_1 z_3 \partial_{z_3} + z_4 \partial_{z_4}] f \\
E_{-\alpha_1} f &= \frac{\zeta_2}{\zeta_1} [(z_1 - z_1^2) \partial_{z_1} + z_1 z_2 \partial_{z_2} + z_3 \partial_{z_3} + z_1 z_4 \partial_{z_4}] f \\
E_{\alpha_2} f &= \frac{\bar{\zeta}_1}{\zeta_2} [(z_2 - z_2^2) \partial_{z_2} - z_1 \partial_{z_1} + z_2 z_3 \partial_{z_3} + z_4 \partial_{z_4}] f \\
E_{-\alpha_2} f &= \frac{\zeta_3}{\zeta_2} [-z_1 \partial_{z_1} + (z_2 - z_2^2) \partial_{z_2} + z_3 \partial_{z_3} + z_2 z_4 \partial_{z_4}] f \\
E_{\alpha_3} f &= \frac{\bar{\zeta}_1}{\zeta_3} [-z_1 \partial_{z_1} - z_1 z_2^2 \partial_{z_2} + z_1 z_2 z_3 \partial_{z_3} - z_4 \partial_{z_4}] f \\
E_{-\alpha_3} f &= \frac{\zeta_3}{\zeta_1} [(z_1 \partial_{z_1} + z_1 z_2^2 \partial_{z_2} + z_3 \partial_{z_3} - z_1 z_2 z_4 \partial_{z_4})] f
\end{aligned} \tag{5.3.57}$$

É possível escrever os  $f_\alpha$  da seguinte forma

$$f'_\alpha = z_3^s z_4^{\bar{s}} f_\alpha(z_1, z_2) \tag{5.3.58}$$

De modo a justificar a forma dos  $f_\alpha$ , é importante que se observe os operadores

$$D = \sum_{i=1}^3 \zeta_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \quad \bar{D} = \sum_{i=1}^3 \bar{\zeta}_i \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_i} \quad (5.3.59)$$

Como os geradores da álgebra estão em termos de operadores da forma  $\zeta_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i}$  ou  $\bar{\zeta}_i \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_i}$ , é fácil perceber que  $D$  e  $\bar{D}$  comutam com todos os geradores. Assim,  $D$  e  $\bar{D}$  se comportam como operadores de Casimir.

Dado um estado em uma representação irredutível com autovalor  $\lambda$  para  $D$  e  $\bar{\lambda}$  para  $\bar{D}$

$$D | v \rangle = \lambda | v \rangle \quad \bar{D} | v \rangle = \bar{\lambda} | v \rangle \quad (5.3.60)$$

todos os outros estados devem ter os mesmos autovalores desde que cada estado seja obtido a partir de  $| v \rangle$  através da aplicação de uma série de geradores.

$D$  e  $\bar{D}$  medem a soma das potências dos  $\zeta_i$  's e dos  $\bar{\zeta}_i$  's, respectivamente. Isto significa que numa representação irredutível onde todos os estados são polinômios em  $\zeta_i$  e  $\bar{\zeta}_i$  a soma das potências de  $\zeta_i$  e  $\bar{\zeta}_i$  é fixa. Os invariantes  $z_1$  e  $z_2$  possuem autovalor zero, de modo que os estados podem ter qualquer potência dos mesmos. Contudo, os invariantes  $z_3$  e  $z_4$  possuem autovalor 3 de modo que as funções  $f_\alpha$  devem ter apenas monômios de  $z_3$  e  $z_4$ . Assim a nova forma dos  $f_\alpha$  está justificada.

### O Operador de Casimir Quadrático

Partindo de

$$\begin{aligned} \text{Tr}(H_a H_b) &= K_{ab} & K_{ab} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{Tr}(E_\alpha E_{-\alpha}) &= \frac{2}{\alpha^2} = 1 & K_{ab}^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.3.61)$$

Tem-se que o operador de Casimir quadrático é dado por

$$C_2 = \frac{1}{3} (2H_1^2 + 2H_2^2 + H_1 H_2 + H_2 H_1 + \sum_{\alpha > 0} (E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha} E_\alpha)) \quad (5.3.62)$$

Escrevendo os  $H_i$ 's em termos de  $\zeta$  fica-se com

$$\begin{aligned} H_1^2 &= \zeta_1 \partial_1 + \zeta_1^2 \partial_1^2 - 2\zeta_1 \zeta_2 \partial_1 \partial_2 + \zeta_2 \partial_2 + \zeta_2^2 \partial_2^2 \\ H_2^2 &= \zeta_2 \partial_2 + \zeta_2^2 \partial_2^2 - 2\zeta_2 \zeta_3 \partial_2 \partial_3 + \zeta_3 \partial_3 + \zeta_3^2 \partial_3^2 \\ H_1 H_2 &= \zeta_1 \zeta_2 \partial_1 \partial_2 - \zeta_1 \zeta_3 \partial_3 \partial_2 - \zeta_2 \partial_2 - \zeta_2^2 \partial_2^2 + \zeta_2 \zeta_3 \partial_3 \partial_2 \\ E_1 E_{-1} + E_{-1} E_1 &= \zeta_1 \partial_1 + 2\zeta_1 \zeta_2 \partial_1 \partial_2 + \zeta_2 \partial_2 \\ E_2 E_{-2} + E_{-2} E_2 &= \zeta_2 \partial_2 + 2\zeta_2 \zeta_3 \partial_2 \partial_3 + \zeta_3 \partial_3 \\ E_3 E_{-3} + E_{-3} E_3 &= \zeta_1 \partial_1 + 2\zeta_1 \zeta_3 \partial_1 \partial_3 + \zeta_3 \partial_3 \end{aligned} \quad (5.3.63)$$

Então

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{8}{3} \sum_i \zeta_i \partial_i + \frac{2}{3} \sum_i \zeta_i^2 \partial_i^2 + \frac{4}{3} (\zeta_1 \zeta_2 \partial_1 \partial_2 + \zeta_1 \zeta_3 \partial_1 \partial_3 + \zeta_2 \zeta_3 \partial_2 \partial_3) \\
&= \frac{2}{3} \left\{ \sum_{i,j=1}^3 \zeta_i \zeta_j \partial_i \partial_j + 4 \sum_{i=1}^3 \zeta_i \partial_i \right\}
\end{aligned} \tag{5.3.64}$$

É possível checar este resultado fazendo

$$[\tilde{C}_2, \zeta_k \partial_l] = \sum_{i,j} (\zeta_i \zeta_j \partial_i \partial_j \zeta_k \partial_l - \zeta_k \partial_l \zeta_i \zeta_j \partial_i \partial_j) = 0 \tag{5.3.65}$$

onde

$$\tilde{C}_2 = C_2 - \frac{8}{3} \sum \zeta_i \partial_i$$

Considerando agora o comutador

$$\begin{aligned}
[C_3, \zeta_l \partial_m] &= \sum_{i,j,k} [\zeta_i \zeta_j \zeta_k \partial_i \partial_j \partial_k, \zeta_l \partial_m] \\
&= \zeta_i \zeta_j \zeta_k \partial_i \partial_j (\delta_{kl} \partial_m + \zeta_l \partial_k \partial_m) - \zeta_l (\partial_m (\zeta_i \zeta_j \zeta_k)) \partial_i \partial_j \partial_k \\
&\quad - \zeta_l \zeta_i \zeta_j \zeta_k \partial_m \partial_i \partial_j \partial_k = 0
\end{aligned} \tag{5.3.66}$$

Enão ,aparentemente, o que se tem é um número infinito de operadores tipo Casimir, dados por

$$C_\mu = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^3 \zeta_{j_1} \zeta_{j_2} \cdots \zeta_{j_n} \partial_{j_1} \partial_{j_2} \cdots \partial_{j_n} \tag{5.3.67}$$

Foi visto que  $C_1$  mede a soma das potências dos  $\zeta$ 's, vai-se ver agora o que faz  $C_2$ ,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \zeta_i \zeta_j \partial_i \partial_j \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2} \zeta_3^{m_3} = \\
&= \zeta_i \zeta_j \partial_i \left( \delta_{j_1} m_1 \zeta_1^{m_1-1} \zeta_2^{m_2} \zeta_3^{m_3} + \delta_{j_2} m_2 \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2-1} \zeta_3^{m_3} + \delta_{j_3} m_3 \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2} \zeta_3^{m_3-1} \right) \\
&= \zeta_i \zeta_j \left\{ \delta_{j_1} m_1 \left( (m_1 - 1) \delta_{i_1} \zeta_1^{m_1-2} \zeta_2^{m_2} \zeta_3^{m_3} + \delta_{i_2} m_2 \zeta_1^{m_1-1} \zeta_2^{m_2-1} \zeta_3^{m_3} + \delta_{i_3} m_3 \zeta_1^{m_1-1} \zeta_2^{m_2} \zeta_3^{m_3-1} \right) \right. \\
&\quad + \delta_{j_2} m_2 \left( \delta_{i_1} m_1 \zeta_1^{m_1-1} \zeta_2^{m_2-1} \zeta_3^{m_3} + \delta_{i_2} (m_2 - 1) \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2-2} \zeta_3^{m_3} + \delta_{i_3} m_3 \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2-1} \zeta_3^{m_3-1} \right) \\
&\quad \left. + \delta_{j_3} m_3 \left( \delta_{i_1} m_1 \zeta_1^{m_1-1} \zeta_2^{m_2} \zeta_3^{m_3-1} + \delta_{i_2} m_2 \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2-1} \zeta_3^{m_3-1} + \delta_{i_3} (m_3 - 1) \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2} \zeta_3^{m_3-2} \right) \right\} \\
&= (m_1(m_1 - 1) + m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_1 + m_2(m_2 - 1) + m_2 m_3 + m_3 m_2 \\
&\quad + m_3(m_3 - 1)) \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2} \zeta_3^{m_3} \\
&= - \sum_i m_i + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2m_1 m_2 + 2m_1 m_3 + 2m_2 m_3 \\
&= \left( \sum_i m_i \right)^2 - \sum_i m_i
\end{aligned} \tag{5.3.68}$$



De modo que é conveniente definir

$$\begin{aligned}
C_\mu &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \zeta_{j_1} \partial_{j_1} \zeta_{j_2} \partial_{j_2} \cdots \zeta_{j_n} \partial_{j_n} \\
&= \sum_{j_1} \zeta_{j_1} \partial_{j_1} \sum_{j_2} \zeta_{j_2} \partial_{j_2} \cdots \sum_{j_n} \zeta_{j_n} \partial_{j_n} \\
&= \left( \sum_j \zeta_j \partial_j \right)^n \equiv D^n
\end{aligned} \tag{5.3.69}$$

É suficiente que se observe  $D$  para saber a respeito da irreduzibilidade da representação pois não se consegue maiores informações ao se olhar para os operadores de Casimir.

### As Equações de Movimento

As equações de movimento do modelo dadas por (5.1.20), serão agora reescritas em termos do novo  $B_\mu$  dado por (5.3.55). Explicitamente o comutador de  $A$  e  $B$  é dado por

$$\begin{aligned}
\partial B^{\alpha_1} + B^{\alpha_1} (2A^{H_1} - A^{H_2}) + A^{\alpha_3} B^{-\alpha_2} - A^{-\alpha_2} B^{\alpha_3} &= 0 \\
\partial B^{\alpha_2} + B^{\alpha_2} (-A^{H_1} + 2A^{H_2}) + A^{-\alpha_1} B^{\alpha_3} - A^{\alpha_3} B^{-\alpha_1} &= 0 \\
\partial B^{\alpha_3} + B^{\alpha_3} (A^{H_1} + A^{H_2}) + A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} - A^{\alpha_2} B^{\alpha_1} &= 0 \\
\partial B^{-\alpha_1} + B^{-\alpha_1} (-2A^{H_1} + A^{H_2}) + A^{\alpha_2} B^{-\alpha_3} - A^{-\alpha_3} B^{\alpha_2} &= 0 \\
\partial B^{-\alpha_2} + B^{-\alpha_2} (A^{H_1} - 2A^{H_2}) + A^{-\alpha_3} B^{\alpha_1} - A^{\alpha_1} B^{-\alpha_3} &= 0 \\
\partial B^{-\alpha_3} + B^{-\alpha_3} (-A^{H_1} - A^{H_2}) + A^{-\alpha_2} B^{-\alpha_1} - A^{-\alpha_1} B^{-\alpha_2} &= 0
\end{aligned} \tag{5.3.70}$$

Segundo as equações (5.3.70), é necessário que o comutador de  $A$  e  $B$  não possua termos de peso nulo, ou seja  $A | B \rangle_0 = 0$ , de modo que

$$\begin{aligned}
A | B \rangle_0 &= \zeta_2 \bar{\zeta}_2 \{ A^{-\alpha_1} B^{\alpha_1} [(z_1 - z_1^2) \partial_{z_1} + z_1 z_2 \partial_{z_2} + s + 1 + (1 + \bar{s}) z_1] f_1 \\
&\quad A^{\alpha_1} B^{-\alpha_1} [(z_1 - z_1^2) \partial_{z_1} + z_1 z_2 \partial_{z_2} + \bar{s} + 1 + (1 + s) z_1] f_{-1} \} \\
&\quad \zeta_3 \bar{\zeta}_1 \{ A^{-\alpha_2} B^{\alpha_2} [-z_1 \partial_{z_1} + (z_2 - z_2^2) \partial_{z_2} + s + 1 + (1 + \bar{s}) z_2] f_2 \\
&\quad A^{\alpha_2} B^{-\alpha_2} [-z_1 \partial_{z_1} + (z_2 - z_2^2) \partial_{z_2} + \bar{s} + 1 + (1 + s) z_2] f_{-2} \\
&\quad A^{-\alpha_3} B^{\alpha_3} [z_1 \partial_{z_1} + z_1 z_2^2 \partial_{z_2} + s + 1 - (1 + \bar{s}) z_1 z_2] f_3 \\
&\quad A^{\alpha_3} B^{-\alpha_3} [-z_1 \partial_{z_1} - z_1 z_2^2 \partial_{z_2} - \bar{s} - 1 + (1 + s) z_1 z_2] f_{-3} \} = 0
\end{aligned} \tag{5.3.71}$$

No  $SU(3)$ , é válido que

$$A^{-\alpha} B^\alpha - A^\alpha B^{-\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \tag{5.3.72}$$

de modo que é necessário apenas que

$$\begin{aligned}
\{(z_1 - z_1^2)\partial_{z_1} + z_1 z_2 \partial_{z_2} + (1 + s_+)(1 + z_1)\}(f_1 + f_{-1}) + s_-(1 - z_1)(f_1 - f_{-1}) &= 0 \\
\{-z_1 \partial_{z_1} + (z_2 - z_2^2)\partial_{z_2} + (1 + s_+)(1 + z_2)\}(f_2 + f_{-2}) + s_-(1 - z_2)(f_2 - f_{-2}) &= 0 \\
\{z_1 \partial_{z_1} + z_1 z_2^2 \partial_{z_2} + (1 + s_+)(1 - z_1 z_2)\}(f_3 - f_{-3}) + s_-(1 + z_1 z_2)(f_3 + f_{-3}) &= 0
\end{aligned} \tag{5.3.73}$$

onde

$$s = s_+ + s_- \quad \bar{s} = s_+ - s_- \tag{5.3.74}$$

Combinando-se agora os termos de pesos que são iguais a uma dada raiz

$A | B \rangle_\alpha$  e as equações (5.3.70), chega-se em

$$\begin{aligned}
-V_1 f_{-2} + ((1 + s)z_1 z_2 - \bar{s})f_{-2} &= z_1 z_2 f_1 \\
-V_2 f_3 + (s + (1 + \bar{s})z_2)f_3 &= -z_2 f_1 \\
-V_2 f_{-3} + ((1 + s)z_2 + \bar{s})f_{-3} &= z_2 f_{-1} \\
V_1 f_2 + (s - (1 + \bar{s})z_1 z_2)f_2 &= -z_1 z_2 f_{-1} \\
V_3 f_3 + (1 + s + \bar{s}z_1)f_3 &= f_2 \\
-V_1 f_{-1} - (-1 - \bar{s} + s z_1 z_2)f_{-1} &= -f_2 \\
V_1 f_1 + (1 + s - \bar{s}z_1 z_2)f_1 &= f_{-2} \\
V_3 f_{-3} + (1 + \bar{s} + s z_1)f_{-3} &= -f_{-2} \\
V_3 f_2 + ((1 + s)z_1 + \bar{s})f_2 &= z_1 f_3 \\
-V_2 f_1 + (1 + \bar{s} + s z_2)f_1 &= -f_3 \\
-V_2 f_{-1} - (1 + s + \bar{s}z_2)f_{-1} &= f_{-3} \\
V_3 f_{-2} + (s + (1 + \bar{s})z_1)f_{-2} &= -z_1 f_{-3}
\end{aligned} \tag{5.3.75}$$

onde se introduziu a notação

$$\begin{aligned}
V_1 &\equiv z_1 \partial_{z_1} + z_1 z_2^2 \partial_{z_2} \\
V_2 &\equiv z_1 \partial_{z_1} - (z_2 - z_2^2) \partial_{z_2} \\
V_3 &\equiv (z_1 - z_1^2) \partial_{z_1} + z_1 z_2^2 \partial_{z_2}
\end{aligned} \tag{5.3.76}$$

Os  $V_i$  's podem ser relacionados de acordo com

$$V_1 - z_1 V_2 - V_3 = 0 \tag{5.3.77}$$

Tomando agora os termos de  $A | B \rangle$  que são a soma de duas raízes vizinhas e usando as equações (5.3.75), obtém-se

$$((\bar{s} - s)(1 - z_1) - 1)f_3 + f_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
((\bar{s} - s)(1 - z_1) + z_1)f_2 - z_1f_3 &= 0 \\
((\bar{s} - s)(1 + z_1z_2) - 1)f_1 + f_{-2} &= 0 \\
((\bar{s} - s)(1 + z_1z_2) - z_1z_2)f_{-2} + z_1z_2f_1 &= 0 \\
((\bar{s} - s)(1 - z_2) + z_2)f_{-3} - z_2f_{-1} &= 0 \\
((\bar{s} - s)(1 - z_2) - 1)f_{-1} + f_{-3} &= 0 \\
((\bar{s} - s)(1 - z_2) - z_2)f_3 - z_2f_1 &= 0 \\
((\bar{s} - s)(1 - z_2) + 1)f_1 + f_3 &= 0 \\
((\bar{s} - s)(1 + z_1z_2) + z_1z_2)f_2 - z_1z_2f_{-1} &= 0 \\
((\bar{s} - s)(1 + z_1z_2) + 1)f_{-1} - f_2 &= 0 \\
((\bar{s} - s)(1 - z_1) + 1)f_{-3} + f_{-2} &= 0 \\
((\bar{s} - s)(1 - z_1) - z_1)f_{-2} - z_1f_{-3} &= 0
\end{aligned} \tag{5.3.78}$$

Denotando,

$$w_1 = (\bar{s} - s)(1 - z_1) \quad w_2 = (\bar{s} - s)(1 - z_2) \quad w_3 = (\bar{s} - s)(1 + z_1z_2) \tag{5.3.79}$$

Analisando as equações (5.3.78), nota-se que é necessário que

$$\begin{aligned}
w_1^2 + (-1 + z_1)w_1 = 0 \quad w_1^2 - (-1 + z_1)w_1 = 0 \\
w_2^2 + (1 - z_2)w_2 = 0 \quad w_2^2 - (1 - z_2)w_2 = 0 \\
w_3^2 + (1 + z_1z_2)w_3 = 0 \quad w_3^2 - (1 + z_1z_2)w_3 = 0
\end{aligned} \tag{5.3.80}$$

De modo que

$$w_1 = w_2 = w_3 = 0 \tag{5.3.81}$$

sendo assim,  $\bar{s} = s$ , e

$$f \equiv f_3 = f_2 = -f_1 = f_{-1} = -f_{-2} = -f_{-3} \tag{5.3.82}$$

Retornando agora às equações (5.3.75), tem-se

$$\begin{aligned}
V_1f - ((1 + s)z_1z_2 - s)f &= -z_1z_2f \\
V_1f + (s - (1 + s)z_1z_2)f &= -z_1z_2f \\
V_1f - (-1 - s + sz_1z_2)f &= f \\
V_1f + (1 + s - sz_1z_2)f &= f \\
V_2f - (s + (1 + s)z_2)f &= -z_2f \\
V_2f - ((1 + s)z_2 + s)f &= -z_2f \\
V_2f - (1 + s + sz_2)f &= -f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 f - (1 + s + s z_2) f &= -f \\
V_3 f + (1 + s + s z_1) f &= f \\
V_3 f + (1 + s + s z_1) f &= f \\
V_3 f + ((1 + s) z_1 + s) f &= z_1 f \\
V_3 f + (s + (1 + s) z_1) f &= z_1 f
\end{aligned} \tag{5.3.83}$$

daí tira-se as três equações para  $f$ ,

$$[z_1 \partial_{z_1} + z_1 z_2^2 \partial_{z_2} + s(1 + z_1 z_2)] f = 0 \tag{5.3.84}$$

$$[z_1 \partial_{z_1} - (z_2 - z_2^2) \partial_{z_2} - s(1 + z_2)] f = 0 \tag{5.3.85}$$

$$[(z_1 - z_1^2) \partial_{z_1} + z_1 z_2 \partial_{z_2} + s(1 + z_1)] f = 0 \tag{5.3.86}$$

Ao se fazer (5.3.84)-(5.3.85) obtém-se a equação (5.3.86), de modo que há apenas duas equações linearmente independentes. Subtraindo-se (5.3.85) de (5.3.84),

$$((z_1 z_2 + 1 - z_2) z_2 \partial_{z_2} + s(2 + z_2 - z_1 z_2)) f = 0 \tag{5.3.87}$$

daí

$$z_2 \partial_{z_2} \ln f = -s \frac{2 + (1 - z_1) z_2}{1 - (1 - z_1) z_2} \tag{5.3.88}$$

Fazendo agora  $z_2$ (5.3.86)-(5.3.84), fica-se com

$$\begin{aligned}
((z_2 - z_1 z_2 - 1) z_1 \partial_{z_1} + s(z_2 + 2z_1 z_2 - 1)) f &= 0 \\
z_1 \partial_{z_1} \ln f &= -s \frac{2z_1 z_2 + z_2 - 1}{-z_1 z_2 + z_2 - 1}
\end{aligned} \tag{5.3.89}$$

denotando

$$\begin{aligned}
\omega_1 = \ln z_1 & \quad , \quad z_1 = e^{\omega_1} \\
\omega_2 = \ln z_2 & \quad , \quad z_2 = e^{\omega_2}
\end{aligned} \tag{5.3.90}$$

de modo que

$$\partial_{\omega_1} = z_1 \partial_{z_1} \quad \partial_{\omega_2} = z_2 \partial_{z_2} \tag{5.3.91}$$

de modo que as equações (5.3.87) e (5.3.89) tornam-se

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \omega_1} = s \frac{e^{\omega_2} + 2e^{\omega_1 + \omega_2} - 1}{-e^{\omega_2} + e^{\omega_1 + \omega_2} + 1} \tag{5.3.92}$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \omega_2} = s \frac{e^{\omega_2} - e^{\omega_1 + \omega_2} + 2}{e^{\omega_2} - e^{\omega_1 + \omega_2} - 1} \tag{5.3.93}$$

Derivando (5.3.92) em relação a  $\omega_2$  e (5.3.93) em relação a  $\omega_1$  fica-se com

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \omega_2 \partial \omega_1} = \frac{3s e^{\omega_1 + \omega_2}}{(e^{\omega_2} - e^{\omega_1 + \omega_2} - 1)^2} \quad (5.3.94)$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} = -\frac{3s (e^{\omega_2} - e^{\omega_1 + \omega_2})}{(e^{\omega_2} - e^{\omega_1 + \omega_2} - 1)^2} \quad (5.3.95)$$

Vê-se então que as equações (5.3.92) e (5.3.93) são incompatíveis, a não ser que  $s = 0$ . Neste caso

$$\ln f = \tilde{\beta}_1 \omega_1 + \tilde{\beta}_2 \omega_2 + \tilde{\gamma} \quad (5.3.96)$$

onde  $\beta_i = e^{\tilde{\beta}_i}$  e  $\gamma = e^{\tilde{\gamma}}$  e  $f$  será dada por

$$f = \gamma z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \quad (5.3.97)$$

Substituindo  $f$  em (5.3.87) e (5.3.89) obtém-se

$$\begin{aligned} (\beta_1 + \beta_2 z_1 z_2) \gamma z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} &= 0 \\ (\beta_1 - (1 - z_2) \beta_2) \gamma z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.98)$$

é então necessário que

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \quad (5.3.99)$$

de modo que  $f = \text{constante}$ , sendo assim retorna-se à representação adjunta. Como não foram impostos vínculos para os termos de  $A | B \rangle$  que estão na direção da soma de duas raízes vizinhas, só é possível obter as equações de movimento na representação adjunta.

Ao se tentar analisar a existência de vínculos para os termos de  $A | B \rangle$  que são iguais ao dobro das raízes, chega-se novamente a equações que são inconsistentes a não ser que  $f_\alpha$  sejam dadas por constantes ou por singletos.

Sendo assim, os vínculos que devem ser impostos para que se recuperem as equações de movimento são dados por

$$\begin{aligned} A^{\alpha_i} B^{\alpha_i} &= 0 & A^{-\alpha_i} B^{-\alpha_i} &= 0 \\ A^{\alpha_1} B^{\alpha_3} &= 0 & A^{\alpha_3} B^{\alpha_1} &= 0 \\ A^{\alpha_2} B^{\alpha_3} &= 0 & A^{\alpha_3} B^{\alpha_2} &= 0 \\ A^{\alpha_2} B^{-\alpha_1} &= 0 & A^{-\alpha_1} B^{\alpha_2} &= 0 \\ A^{-\alpha_1} B^{-\alpha_3} &= 0 & A^{-\alpha_3} B^{-\alpha_1} &= 0 \\ A^{-\alpha_2} B^{-\alpha_3} &= 0 & A^{-\alpha_3} B^{-\alpha_2} &= 0 \\ A^{\alpha_1} B^{-\alpha_2} &= 0 & A^{-\alpha_2} B^{\alpha_1} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.100)$$

Além de se impor os vínculos dados por (5.3.100) é necessário ainda que se resolvam as equações

$$\begin{aligned}
\{(z_1 - z_1^2)\partial_{z_1} + z_1 z_2 \partial_{z_2} + (1 + s_+)(1 + z_1)\}(f_1 + f_{-1}) + s_-(1 - z_1)(f_1 - f_{-1}) &= 0 \\
\{-z_1 \partial_{z_1} + (z_2 - z_2^2)\partial_{z_2} + (1 + s_+)(1 + z_2)\}(f_2 + f_{-2}) + s_-(1 - z_2)(f_2 - f_{-2}) &= 0 \\
\{z_1 \partial_{z_1} + z_1 z_2^2 \partial_{z_2} + (1 + s_+)(1 - z_1 z_2)\}(f_3 - f_{-3}) + s_-(1 + z_1 z_2)(f_3 + f_{-3}) &= 0 \\
-V_1 f_{-2} + ((1 + s)z_1 z_2 - \bar{s})f_{-2} &= z_1 z_2 f_1 \\
-V_2 f_3 + (s + (1 + \bar{s})z_2)f_3 &= -z_2 f_1 \\
-V_2 f_{-3} + ((1 + s)z_2 + \bar{s})f_{-3} &= z_2 f_{-1} \\
V_1 f_2 + (s - (1 + \bar{s})z_1 z_2)f_2 &= -z_1 z_2 f_{-1} \\
V_3 f_3 + (1 + s + \bar{s}z_1)f_3 &= f_2 \\
-V_1 f_{-1} - (-1 - \bar{s} + s z_1 z_2)f_{-1} &= -f_2 \\
V_1 f_1 + (1 + s - \bar{s}z_1 z_2)f_1 &= f_{-2} \\
V_3 f_{-3} + (1 + \bar{s} + s z_1)f_{-3} &= -f_{-2} \\
V_3 f_2 + ((1 + s)z_1 + \bar{s})f_2 &= z_1 f_3 \\
-V_2 f_1 + (1 + \bar{s} + s z_2)f_1 &= -f_3 \\
-V_2 f_{-1} - (1 + s + \bar{s}z_2)f_{-1} &= f_{-3} \\
V_3 f_{-2} + (s + (1 + \bar{s})z_1)f_{-2} &= -z_1 f_{-3}
\end{aligned} \tag{5.3.101}$$

onde os  $V_i$ 's são definidos em (5.3.76). As soluções de (5.3.101) levam à representação adjunta. Assim sendo, não é possível encontrar, através do método aqui utilizado, uma representação na qual seja possível encontrar um número infinito de correntes conservadas.

## 5.4 Conclusões

O método utilizado neste capítulo para construir submodelos integráveis do modelo de Skyrme-Faddeev (SF) associado ao  $SU(3)$ , consiste basicamente em considerar representações que contenham estados com os pesos da representação adjunta. Isto é o ponto de partida em (5.3.55). A partir daí tenta-se encontrar um número mínimo de vínculos de tal maneira que a curvatura nula seja satisfeita em uma representação infinita ou então em um número infinito de representações. O método é na verdade o mesmo utilizado no caso do modelo de SF associado ao  $SU(2)$  em [3]. No entanto, ao contrário do caso  $SU(2)$  nós não conseguimos encontrar para o modelo do  $SU(3)$ , submodelos com um número infinito de correntes conservadas.

A razão principal para tal diferença é a seguinte: o modelo SF associado a  $SU(N)$  é definido no espaço coset  $SU(N)/U(1)^{N-1}$ . A conexão  $A_\mu$  da curvatura nula pode ser dividida em duas partes,  $A_\mu = A_\mu^H + A_\mu^E$ , onde  $A_\mu^H$  pertence à subálgebra  $U(1)^{N-1}$ , e  $A_\mu^E$  ao plano tangente de  $SU(N)/U(1)^{N-1}$ . No caso do modelo associado a  $SU(2)$  a curvatura nula depende somente de  $A_\mu^H$ , isto é,

$$D^\mu B_\mu = \partial^\mu B_\mu + [A^\mu, B_\mu] = \partial^\mu B_\mu + [A^{\mu H}, B_\mu] \quad (5.4.102)$$

Ou seja, a curvatura nula depende somente da representação de  $U(1)$  definida por  $B_\mu$ . No caso dos demais modelos associados a  $SU(N)$  para  $N > 2$  o mesmo não ocorre. A curvatura nula depende de todas as componentes de  $A_\mu$ . Talvez a razão principal para isto é que  $SU(2)/U(1)$  é um espaço simétrico enquanto que  $SU(N)/U(1)^{N-1}$  para  $N > 2$  não é. Note que  $SU(2)/U(1)$  pertence também à série de espaços  $CP^{N-1}$  dados por  $SU(N)/SU(N-1) \times U(1)$ , que são espaços simétricos. O operador  $B_\mu$  dado por (5.1.21) e (5.1.15), contém somente geradores do espaço tangente de  $SU(N)/U(1)^{N-1}$ . Desta maneira no caso  $N = 2$  estes geradores são ímpares sob o automorfismo involutivo definindo o espaço simétrico. Logo o comutador  $[A^{\mu E}, B_\mu]$  é par e não deve contribuir para a curvatura nula. No caso  $N > 2$  isto não ocorre pois não há um automorfismo garantindo a paridade dos termos.

No caso em que a curvatura nula depende somente da representação de um subgrupo, como no caso de  $N = 2$ , existe uma maneira bastante precisa de se construir submodelos integráveis proposto em [13] e discutido na seção 3.2 desta tese. A idéia é buscar representações do grupo que contenham em sua decomposição em termos de representações do subgrupo aquela representação dada por  $B_\mu$ . Isto garante que as equações de movimento serão obtidas a partir da curvatura nula nestas novas representações, restando somente a análise dos vínculos. Vale dizer que nem todos os submodelos integráveis conhecidos são obtidos desta maneira. O submodelo da teoria de Skyrme proposto em [15] é um exemplo disto onde o método utilizado é direto. Nossa tentativa de construir submodelos integráveis para a teoria de Skyrme-Faddeev para  $N = 3$  foi feita através deste método direto uma vez que as técnicas de [13] não se aplicam neste caso. No entanto, praticamente mostramos que não existem tais submodelos integráveis para o caso  $N = 3$ . As dificuldades surgem exatamente da parte das equações de movimento provenientes do termo  $[A^{\mu E}, B_\mu]$  da curvatura nula. Quando colocamos o operador  $B_\mu$  em uma representação que contém os pesos da representação adjunta, como em (5.3.55), e substituímos na curvatura nula obtemos automaticamente a parte da equação de movimento contendo  $\partial B$  e  $A^H B$  (veja (5.3.70)). Para obtermos as partes envolvendo  $A^\alpha B$  temos que impor condições nas funções  $f_i$  introduzidas em (5.3.55). Note de (5.3.70) que obtemos duas condições para cada equação de movimento, pois existem

dois termos da forma  $A^\alpha B$  em cada uma delas. Logo obtemos 12 condições sobre 6 funções  $f_i$ 's. Além disso, a imposição de que não devemos ter termos da curvatura nula na direção dos pesos nulos adiciona outras 3 condições sobre os  $f_i$ 's. Estas 15 condições são dadas explicitamente em (5.3.101). Note que elas são equações diferenciais lineares de primeira ordem nos invariantes  $z_1$  e  $z_2$ . O fato do número de equações exceder o número de funções acarreta incompatibilidades por duas razões, a saber,

1. Utilizando equações que contenham derivadas de uma dada função  $f_i$  podemos, através de combinações lineares destas equações, obter expressões para as derivadas  $\partial_{z_1} f_i$  e  $\partial_{z_2} f_i$ . Em muitos casos estas expressões são incompatíveis pois implicam que  $\partial_{z_2} \partial_{z_1} f_i \neq \partial_{z_1} \partial_{z_2} f_i$ .
2. As derivadas ocorrem nas equações diferenciais através dos operadores  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , introduzidos em (5.3.76), que satisfazem a relação  $V_1 - z_1 V_2 - V_3 = 0$ . Utilizando tal relação é possível obter combinações das equações diferenciais onde as derivadas são eliminadas. Ou seja, obtemos equações algébricas entre as funções  $f_i$ 's, que limitam ainda mais o número de funções independentes.

São estes dois pontos que inviabilizam a obtenção de representações, além da adjunta, onde a curvatura nula é satisfeita como consequência das equações de movimento e possíveis vínculos. Por sua vez, como explicamos acima, estes dois pontos têm sua origem no fato do termo  $[A^{\mu^E}, B_\mu]$  na curvatura nula, não zerar.

Portanto, acreditamos que uma maneira de buscar submodelos integráveis para a teoria de Skyrme-Faddeev para  $N > 2$ , seja reduzir tais teorias para aquelas onde  $[A^{\mu^E}, B_\mu] = 0$ . Ou seja, impomos vínculos à teoria de SF para que as técnicas de [13] sejam aplicáveis. Seria importante investigar esta possibilidade mais profundamente para se tentar entender as possíveis estruturas de integrabilidade presentes na teoria de Skyrme-Faddeev para  $N > 2$ .



## Referências

- [1] Orlando Alvarez, L. A. Ferreira, J. Sánchez Guillén, hep-th/9903168
- [2] Orlando Alvarez, L. A. Ferreira, J. Sánchez Guillén, *Nucl. Phys.* **B529** (1998) 689, hep-th/9710147
- [3] H. Aratyn, L. A. Ferreira, A. H. Zimerman, *Phys. Lett.* **B456** (1999) 162, hep-th/9902141; *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 1723-1726 , hep-th/9905079
- [4] O. Babelon, L. A. Ferreira, em preparação
- [5] A.A. Belavin & A.M. Polyakov, *JETP Lett.* **22** (1975) 245-247
- [6] Y.M. Cho, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 1080
- [7] G.Derrick, *J. Math. Phys.* **5** (1964) 1252
- [8] Ludvig Faddeev, *Quantisation of Solitons*, preprint IAS Print-75-QS70, 1975
- [9] Ludvig Faddeev, Antti J. Niemi, *Nature* **387**(1997) 58, hep-th/9705176
- [10] Ludvig Faddeev, Antti J. Niemi, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 1624, hep-th/9807069
- [11] Ludvig Faddeev, Antti J. Niemi, *Phys. Lett.* **B449** (1999) 214, hep-th/9812090
- [12] L. A. Ferreira, *Modelos Integráveis* (Notas de Aulas)
- [13] L. A. Ferreira, E.E. Leite, *Nucl. Phys.* **B547** (1999) 471, hep-th/9810067
- [14] L.A. Ferreira, *Lecture Notes on Lie Algebras and Lie Groups* (Notas de aulas)
- [15] L.A. Ferreira and J. Sanchez Guillen, *Phys.Lett.* **B504** (2001), 195-200, hep-th/0010168
- [16] Robert Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications* (John Wiley & Sons)

- [17] Louis H. Kauffman, *Knots and Physics* (World Scientific)
- [18] J. Schwinger, *On Angular Momentum* (Nuclear Development Associates, Inc. -1952)
- [19] T. R. H. Skyrme, *Nucl. Phys.* **B31** (1962) 556
- [20] G. t'Hooft, *Nucl. Phys.* **B153** (1979) 141
- [21] A.F. Vakulenko & L.V. Kapitanski, *Dokl. Akad. Nauk USSR* **248** (1979) 810
- [22] R. S. Ward, *Phys. Lett.* **B158** (1985) 424